Evaluation n° 3

Durée : 2h

Les documents sont interdits. Les calculatrices en mode examen sont autorisées.

1. Rédigez sur une copie double en laissant une marge suffisante au correcteur.
2. Numérotez les exercices, les questions traitées (et vos copies en fin d'épreuve).
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. Pour répondre à une question, vous pouvez admettre les résultats d'une question précédente non résolue, du moment que ce soit clairement indiqué sur votre copie.

Ce sujet de trois pages est composé de six exercices et d'une annexe.

Exercice 1

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{x^2+2}{x^3+6x+2}$
2. $f_2(x) = x(-x^2-3)^7$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes à l'aides des primitives usuelles :

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^2 (-x^3+5x^2-x+2)\mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_2^3 \frac{4x^3}{\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x$

Exercice 3

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 (t-1)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 4

Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3t^2}{(1+t^3)^4}\,dt$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 3. On note Y la variable aléatoire définie par $Y = \dfrac{1}{4}X$. Le but de cet exercice est de déterminer la loi de Y.
On note F_X la fonction de répartition de X et F_Y la fonction de répartition de F_Y.

1. Déterminer pour tout réel x, l'expression de $F_X(x)$.
   On ne demande pas ici démontrer le résultat du cours.
2. Justifier que pour tout réel y, $\quad F_Y(y) = F_X(4y)$.
3. En déduire pour tout réel y, l'expression de $F_Y(y)$ en distinguant les cas $y < 0$ et $y \geq 0$.
4. En déduire la loi de Y.
5. Déterminer $P\left(Y \leq \dfrac{1}{4}\right)$ et $P_{[Y\leq\frac{1}{4}]}\left(Y > \dfrac{1}{8}\right)$.

Exercice 6

On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{64}{x^5} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1. Montrer que g est une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition G_X d'une variable aléatoire X admettant g pour densité.
3. Calculer $P(X < 3)$ et $P(X > 4)$.
4. Déterminer (si elle existe) l'espérance $E(X)$ de X.
5. Déterminer (si elle existe) la variance $V(X)$ de X.
6. On pose $Z = 3X - 1$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition G_Z de Z.
   (b) Calculer $P(Z < 8)$ et $P(5 < Z < 11)$.
   (c) Calculer (sans utiliser les intégrales) l'espérance et la variance de Z.

ANNEXE 1
Formulaire lois usuelles

Loi uniforme Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$

- Densité : $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad t \in [a,b], \\ 0 & \text{si} \quad t \notin [a,b]. \end{cases}$
- Fonction de répartition : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a,b], \\ 1 & \text{si} \quad x > b. \end{cases}$
- Espérance : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$
- Variance : $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Loi exponentielle Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

- Densité : $f(t) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geq 0, \\ 0 & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$
- Fonction de répartition : $F_X(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$
- Espérance : $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$
- Variance : $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Corrigé : Evaluation n° 3

Exercice 1

Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{x^2+2}{x^3+6x+2}$

$$F_1(x) = \frac{1}{3}\ln|x^3+6x+2|$$

2. $f_2(x) = x(-x^2-3)^7$

$$F_2(x) = \frac{-1}{2}\frac{(-x^2-3)^8}{8} = -\frac{(-x^2-3)^8}{16}$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes à l'aides des primitives usuelles :

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^2 (-x^3+5x^2-x+2)\mathrm{d}x$

On considère l'intégrale :

$$I_1 = \int_1^2 (-x^3+5x^2-x+2)\,\mathrm{d}x.$$

Une primitive de $x \mapsto -x^3+5x^2-x+2$ est :

$$F(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x.$$

On évalue cette primitive entre 1 et 2 :

$$I_1 = F(2) - F(1).$$

Calcul de $F(2)$:

$$F(2) = -\frac{16}{4} + \frac{40}{3} - \frac{4}{2} + 4 = -4 + \frac{40}{3} - 2 + 4 = \frac{40}{3} - 2 = \frac{34}{3}.$$

Calcul de $F(1)$:

$$F(1) = -\frac{1}{4} + \frac{5}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{35}{12}.$$

Ainsi :

$$I_1 = \frac{34}{3} - \frac{35}{12} = \frac{136}{12} - \frac{35}{12} = \frac{101}{12}.$$

2. $I_2 = \displaystyle\int_2^3 \frac{4x^3}{\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x$

On remarque que la dérivée de $x \mapsto x^4+1$ est $x \mapsto 4x^3$. Ainsi, une primitive de la fonction intégrée est :

$$F(x) = 2\sqrt{x^4+1}.$$

On évalue cette primitive entre les bornes 2 et 3 :

$$I_2 = F(3) - F(2) = 2\sqrt{3^4+1} - 2\sqrt{2^4+1} = 2\sqrt{82} - 2\sqrt{17}.$$

Exercice 3

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 (t-1)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ à l'aide d'une intégration par parties.

On pose $u(t) = t-1$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{-t}$. On a alors : $u'(t) = 1$ et $v(t) = -e^{-t}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} I &= \left[-(t-1)\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \left(-\mathrm{e}^{-t}\right) dt \\ &= 0 - \mathrm{e}^0 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\, dt \\ &= -1 + \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1 \\ &= -1 - \mathrm{e}^{-1} + 1 \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

Exercice 4

Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3t^2}{(1+t^3)^4}\, dt$ converge et calculer sa valeur.

Soit $M \in [0; +\infty[$, calculons la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^M \frac{3t^2}{(1+t^3)^4}\, \mathrm{d}t.$$

Pour cela, calculons une primitive de la fonction $f(t) = \dfrac{3t^2}{(1+t^3)^4}$. Remarquons que :

$$\frac{3t^2}{(1+t^3)^4} = 3t^2(1+t^3)^{-4}.$$

La fonction f semble être de la forme $u'u^\alpha$ avec $\alpha = -4$ et $u(t) = 1+t^3$. On a $u'(t) = 3t^2$. Ainsi

$$u'u^\alpha = 3t^2(1+t^3)^{-4} = f(t).$$

Une primitive de f est donc donnée par :

$$F(t) = \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} = \frac{1}{-3}(1+t^3)^{-3} = -\frac{1}{3(1+t^3)^3}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^M \frac{3t^2}{(1+t^3)^4}\, \mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{3(1+t^3)^3}\right]_0^M \\ &= -\frac{1}{3(1+M^3)^3} + \frac{1}{3(1+0)^3} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3(1+M^3)^3}. \end{aligned}$$

Or $\lim_{M\to+\infty} -\frac{1}{3(1+M^3)^3} = 0$ donc

$$\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{3} - \frac{1}{3(1+M^3)^3} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{3t^2}{(1+t^3)^4}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_0^{+\infty} \frac{3t^2}{(1+t^3)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}.$$

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 3. On note Y la variable aléatoire définie par $Y = \frac{1}{4}X$. Le but de cet exercice est de déterminer la loi de Y.

On note F_X la fonction de répartition de X et F_Y la fonction de répartition de F_Y.

1. Déterminer pour tout réel x, l'expression de $F_X(x)$.
   On ne demande pas ici démontrer le résultat du cours.

D'après le cours, on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-3x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

2. Justifier que pour tout réel y, $\quad F_Y(y) = F_X(4y)$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. On a :

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\frac{1}{4}X \leq y) = P(X \leq 4y) = F_X(4y)$$

3. En déduire pour tout réel y, l'expression de $F_Y(y)$ en distinguant les cas $y < 0$ et $y \geq 0$.

On a donc :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \begin{cases} 1 - e^{-12y} & \text{si} \quad 4y \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad 4y < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-12y} & \text{si} \quad y \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

4. En déduire la loi de Y.

On reconnait la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 12 donc $Y \sim \mathcal{E}(12)$.

5. Déterminer $P\left(Y \leq \frac{1}{4}\right)$ et $P_{[Y\leq\frac{1}{4}]}\left(Y > \frac{1}{8}\right)$.

On a :

$$P(Y \leq \frac{1}{4}) = F_Y(\frac{1}{4}) = 1 - e^{-3}$$

Par ailleurs, d'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_{[Y\leq\frac{1}{4}]}(Y > \frac{1}{8}) = \frac{P(\frac{1}{8} < Y \leq \frac{1}{4})}{P(Y \leq \frac{1}{4})}$$

> Or,
> $$P(\frac{1}{8} < Y \leq \frac{1}{4}) = F_Y(\frac{1}{4}) - F_Y(\frac{1}{8}) = 1 - e^{-3} - (1 - e^{-1.5}) = e^{-1.5} - e^{-3}$$
> Et donc,
> $$P_{[Y \leq \frac{1}{4}]}(Y > \frac{1}{8}) = \frac{e^{-1.5} - e^{-3}}{1 - e^{-3}}$$

Exercice 6

On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{64}{x^5} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1. Montrer que g est une densité de probabilité.

> - $g(x) \geq 0$ pour tout x.
> - g est continue sauf en $x = 2$.
> - Montrons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = 1$:
>
> $$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{2} 0\,dx + \int_{2}^{+\infty} \frac{64}{x^5}\,dx$$
>
> Calculons $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{64}{x^5}\,dx$. Soit $M > 2$, posons $\displaystyle\int_{2}^{M} \frac{64}{x^5}\,dx$, on a :
>
> $$\int_{2}^{M} \frac{4}{x^5}\,dx = \left[\frac{-16}{x^4}\right]_2^M = -\frac{16}{M^4} + \frac{16}{2^4} = 1 - \frac{16}{M^4}.$$
>
> Or $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} -\frac{16}{M^4} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \int_{2}^{M} \frac{4}{x^5}\,dx = 1$. Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$ converge et vaut 1.
>
> On peut donc conclure que g est bien une densité de probabilité.

2. Déterminer la fonction de répartition G_X d'une variable aléatoire X admettant g pour densité.

> Par définition, $G_X(x) = P(X \leq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt$. On a alors deux cas :
> - Si $x < 2$, $G_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$
> - Si $x > 2$, $G_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{2} 0\,dt + \int_{2}^{x} \frac{64}{t^5}dt = 0 + \left[-\frac{16}{t^4}\right]_2^x = 1 - \frac{16}{x^4}$

3. Calculer $P(X < 3)$ et $P(X > 4)$.

> On a : $P(X < 3) = G_X(3) = 1 - \dfrac{16}{3^4} = 1 - \dfrac{16}{81} = \dfrac{65}{81}$.
>
> On a : $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - G_X(4) = 1 - (1 - \dfrac{16}{4^4}) = \dfrac{4^2}{4^2} = \dfrac{1}{16}$

4. Déterminer (si elle existe) l'espérance $E(X)$ de X.

Etudions la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\,dx$. On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\,dx = \int_{-\infty}^{2} xg(x)\,dx + \int_{2}^{+\infty} xg(x)\,dx = 0 + \int_{2}^{+\infty} x \times \frac{64}{x^5}\,dx$$

Posons $M > 2$ et calculons $\int_2^M \frac{64}{x^4}\,dx$. On a :

$$\int_2^M \frac{64}{x^4}\,dx = \left[\frac{-64}{3x^3}\right]_2^M = -\frac{64}{3M^3} + \frac{8}{3}.$$

Or $\lim\limits_{M\to+\infty} \frac{-64}{3M^3} = 0$ donc $\lim\limits_{M\to+\infty} \int_2^M \frac{64}{x^4}\,dx = \frac{8}{3}$.
Ainsi $E(X)$ existe et $E(X) = \frac{8}{3}$.

5. Déterminer (si elle existe) la variance $V(X)$ de X.

Pour que $V(X)$, il faut que $E(X^2)$ existe car d'après la formule de König-Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Etudions donc la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)\,dx$. On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{2} x^2g(x)\,dx + \int_{2}^{+\infty} x^2g(x)\,dx = 0 + \int_{2}^{+\infty} x^2 \times \frac{64}{x^5}\,dx$$

Posons $M > 2$ et calculons $\int_2^M \frac{64}{x^3}\,dx$. On a :

$$\int_2^M \frac{64}{x^3}\,dx = \left[\frac{-32}{x^2}\right]_2^M = -\frac{32}{M^2}8.$$

Or $\lim\limits_{M\to+\infty} \frac{-32}{M^2} = 0$ donc $\lim\limits_{M\to+\infty} \int_2^M \frac{64}{x^3}\,dx = 8$.
Ainsi $E(X^2)$ existe et $E(X^2) = 8$. On en déduit que :

$$V(X) = 8 - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

6. On pose $Z = 3X - 1$.

(a) Déterminer la fonction de répartition G_Z de Z.

On a :

$$G_Z(z) = P(Z \leq z) = P(3X - 1 \leq z) = P(X \leq \frac{z+1}{3}) = G_X\left(\frac{z+1}{3}\right)$$

Ainsi :

$$G_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{z+1}{3} \leq 2 \\ 1 - \frac{16}{\left(\frac{z+1}{3}\right)^4} & \text{si } \frac{z+1}{3} > 2 \end{cases}$$

i.e.

$$G_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 5 \\ 1 - \frac{16}{\left(\frac{z+1}{3}\right)^4} & \text{si } z > 5 \end{cases}$$

(b) Calculer $P(Z < 8)$ et $P(5 < Z < 11)$.

> On a : $P(Z < 8) = G_Z(8) = 1 - \frac{16}{3^4} = \frac{65}{81}$. On a : $P(5 < Z < 11) = G_Z(11) - G_Z(5) = \frac{15}{16}$

(c) Calculer (sans utiliser les intégrales) l'espérance et la variance de Z.

> On a : $E(Z) = E(3X - 1) = 3E(X) - 1 = 3 \times \frac{8}{3} - 1 = 7$.
> On a : $V(Z) = V(3X - 1) = 9V(X) = 8$.

ANNEXE 1
Formulaire lois usuelles

Loi uniforme Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$

- Densité : $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad t \in [a,b], \\ 0 & \text{si} \quad t \notin [a,b]. \end{cases}$
- Fonction de répartition : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a,b], \\ 1 & \text{si} \quad x > b. \end{cases}$
- Espérance : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$
- Variance : $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Loi exponentielle Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

- Densité : $f(t) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geq 0, \\ 0 & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$
- Fonction de répartition : $F_X(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$
- Espérance : $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$
- Variance : $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

