# Corrigé : Evaluation n° 3

## Exercice 1 *12 points*

*On pourra se servir du tableau de la loi normale fourni en Annexe 2.*

1. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.
   (a) Calculer $P(X < 0,2)$.

   > $P(X < 0,2) = \Phi(0,2) = 0,5793$

   (b) Calculer $P(X > 1,57)$.

   > $P(X > 1,57) = 1 - \Phi(1,57) = 1 - 0,9418 = 0,0582$

   (c) Calculer $P(-1 < X < 1,37)$.

   > $P(-1 < X < 1,37) = \Phi(1,37) - \Phi(-1) = 0,9147 - (1 - 0,8413) = 0,9147 - 0,1587 = 0,7560$

2. Soit $X \sim \mathcal{N}(-2,1)$.

   > On a $X + 2 \sim \mathcal{N}(0;1)$.

   (a) Calculer $P(X < -1,5)$.

   > $P(X < -1,5) = P(X + 2 < 0,5) = \Phi(0,5) = 0,6915$

   (b) Calculer $P(X > 0)$.

   > $P(X > 0) = P(X + 2 > 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

   (c) Calculer $P(-2 < X < -1)$.

   > $P(-2 < X < -1) = P(0 < X + 2 < 1) = \Phi(1) - \Phi(0) = 0,8413 - 0,5000 = 0,3413$

3. Soit $X \sim \mathcal{N}(5,9)$.

   > On a $\dfrac{X-5}{3} \sim \mathcal{N}(0;1)$.

   (a) Calculer $P(X < 6,5)$.

   > $P(X < 6,5) = P(\dfrac{X-5}{3} < 0,5) = \Phi(0,5) = 0,6915$

   (b) Calculer $P(X > 8)$.

   > $P(X > 8) = P(\dfrac{X-5}{3} > 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$

(c) Calculer $P(6,5 < X < 8)$.

> $$P(6,5 < X < 8) = P(0,5 < \frac{X-5}{3} < 1) = \Phi(1) - \Phi(0,5) = 0,8413 - 0,6915 = 0,1498$$

## Exercice 2 *5 points*

Soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[1,3]$. On note $Y$ la variable aléatoire définie par $Y = 2X$. Le but de cet exercice est de déterminer la loi de $Y$.
On note $F_X$ la fonction de répartition de $X$ et $F_Y$ la fonction de répartition de $Y$.

1. Déterminer, pour tout réel $x$, l'expression de $F_X(x)$.

> A l'aide de l'Annexe 2, on obtient que :
> $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si} \quad x \in [1;3] \\ 1 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

2. Justifier que, pour tout réel $y$, on a
$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y}{2}\right).$$

> Soit $y \in \mathbb{R}$. On a :
> $$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(2X \leq y) = P(X \leq \frac{y}{2}) = F_X\left(\frac{y}{2}\right)$$

3. En déduire, pour tout réel $y$, l'expression de $F_Y(y)$.

> On a donc :
> $$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \frac{y}{2} < 1 \\ \dfrac{\frac{y}{2}-1}{2} & \text{si} \quad \frac{y}{2} \in [1;3] \\ 1 & \text{si} \quad \frac{y}{2} > 3 \end{cases}$$
> $$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < 2 \\ \dfrac{y-2}{4} & \text{si} \quad y \in [2;6] \\ 1 & \text{si} \quad y > 6 \end{cases}$$

4. En déduire la loi de $Y$.

> On reconnait la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[2;6]$ donc $Y \sim \mathcal{U}([2;6])$.

## Exercice 3 *21 points*

On considère la fonction $f$ définie par :
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{3}{x^4} & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

- On a $f(x) = 0$ ou $\dfrac{3}{x^4}$. Dans les deux cas, on a bien $f(x) \geq 0$.
- La fonction $f$ est continue sauf en $1$.
- Il reste à montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $1$. On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x}_{\text{converge et vaut } 0} + \int_{1}^{+\infty} \frac{3}{x^4}\,\mathrm{d}x$$

Par ailleurs, pour tout $M \geq 1$,

$$\int_1^M \frac{3}{x^4}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x^3}\right]_1^M = 1 - \frac{1}{M^3}$$

Et $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} 1 - \frac{1}{M^3} = 1$. Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^3}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $1$.

Ainsi, $f$ est bien une densité de probabilité.

(b) Déterminer la fonction de répartition $F_X$ d'une variable aléatoire $X$ admettant $f$ pour densité.

On sait que $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. Il faut alors distinguer plusieurs cas selon les valeurs de $x$ :

- Si $x < 1$, alors $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$ ;
- Si $x \geq 1$, alors $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{3}{t^4}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{t^3}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x^3}$.

En résumé,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^3} & \text{sinon} \end{cases}$$

(c) Calculer $P(X < 2)$ et $P(X > 6)$.

On a : $P(X < 2) = F_X(2) = 1 - \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{7}{8}$.

On a : $P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - F_X(6) = 1 - (1 - \dfrac{1}{6^3}) = \dfrac{1}{216}$.

(d) Déterminer l'espérance de $X$.

On a (sous réserve d'existence) :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} x \times 0\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} x \times \frac{3}{x^4}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{3}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

Par ailleurs, pour tout $M \geq 1$,

$$\int_1^M \frac{3}{x^3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-3}{2x^2}\right]_1^M = \frac{3}{2} - \frac{3}{2M^2}$$

Et, $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} \frac{3}{2} - \frac{3}{2M^2} = \frac{3}{2}$.

Ainsi, l'intégrale converge. L'espérance existe donc, et $E(X) = \dfrac{3}{2}$.

(e) Déterminer la variance de $X$.


**© M. Fontaine**

> Si $E(X^2)$ existe, on a, d'après la formule de König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)$. Commençons donc par calculer $E(X^2)$ (si l'intégrale converge) :
> On a (sous réserve d'existence) :
>
> $$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} x^2 \times 0\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{+\infty} x^2 \times \frac{3}{x^4}\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{+\infty} \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
>
> Par ailleurs, pour tout $M \geq 1$,
>
> $$\int_1^M \frac{3}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-3}{x}\right]_1^M = -\frac{3}{M} - (-3) = 3 - \frac{3}{M}.$$
>
> Et, $\lim\limits_{M\to+\infty} 3 - \dfrac{3}{M} = 3$.
> Ainsi, l'intégrale converge et $E(X^2) = 3$.
> On en déduit donc la variance :
>
> $$V(X) = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{12-9}{4} = \frac{3}{4}$$

2. On pose $Y = 2X + 3$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition $F_Y$ de $Y$.

> Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
>
> $$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(2X + 3 \leq x) = P(X \leq \frac{x-3}{2}) = F_X(\frac{x-3}{2})$$
>
> Et donc,
>
> $$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dfrac{x-3}{2} \leq 1 \\ 1 - \dfrac{1}{\left(\frac{x-3}{2}\right)^3} & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 5 \\ 1 - \dfrac{8}{(x-2)^3} & \text{sinon} \end{cases}$$

   (b) Calculer $P(Y < 4)$ et $P(6 < Y < 7)$.

> On a : $P(Y < 4) = F_Y(4) = 0$.
> On a :
>
> $$P(6 < Y < 7) = F_Y(7) - F_Y(6) = 1 - \frac{8}{(7-2)^3} - \left(1 - \frac{8}{(6-2)^3}\right) = \frac{8}{4^3} - \frac{8}{5^3} = \frac{1}{8} - \frac{8}{125} = \frac{117}{1000} = 0,117.$$

   (c) Calculer (sans utiliser les intégrales) l'espérance et la variance de $Y$.

> On a : $E(Y) = E(2X+3) = 2E(X) + 3 = 6$ et $V(Y) = V(2X+3) = 4V(X) = 3$.

## Exercice 4 *9 points*

Un fournisseur produit deux sortes de cadenas. Les uns sont *premier prix*, et les autres sont *haut de gamme*. Un magasin de bricolage dispose d'un stock de cadenas provenant de ce fournisseur ; ce stock comprend un grand nombre de cadenas de chaque type.

D'après une étude statistique faite sur plusieurs mois, on admet que le nombre $X$ de cadenas *premier prix* vendus par mois dans le magasin de bricolage peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $m = 750$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

1. Calculer la probabilité que le responsable du magasin vende entre 725 et 775 cadenas.

On doit pour cela calculer $P(725 \leqslant X \leqslant 775)$. On va chercher à se ramener à une loi normale centrée réduite. On a :

$$\begin{aligned} P(725 \leqslant X \leqslant 775) &= P(\frac{725-750}{25} \leqslant X \leqslant \frac{775-750}{25}) \\ &= P(-1 \leq X^* \leq 1) \quad \text{avec } X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= 2\Phi(1) - 1 \\ &= 2 \times 0,8413 - 1 \\ &= 0.6826 \end{aligned}$$

2. Le responsable du magasin veut connaître le nombre minimal $n$ de cadenas *premier prix* qu'il doit avoir en stock en début de mois, pour que la probabilité d'être en rupture de stock en cours de mois soit égale à 0,05. On ne réalimente pas le stock en cours de mois.
   Déterminer la plus petite valeur de l'entier $n$ remplissant cette condition.

On cherche l'entier $n$ tel que $P(X > n) = 0.05$ ce qui équivaut à chercher $n$ tel que $1 - P(X \leq n) = 0.05$ i.e. $P(X \leq n) = 0.95$. Ramenons-nous à une loi normale centrée réduite :

$$\begin{aligned} P(X \leq n) = 0.95 &\iff P\left(\frac{X-750}{25} \leq \frac{n-750}{25}\right) = 0.95 \\ &\iff P\left(X^* \leq \frac{n-750}{25}\right) = 0.95 \\ &\iff \Phi\left(\frac{n-750}{25}\right) = 0.95 \end{aligned}$$

Avec le tableau en Annexe 2, on obtient : $\dfrac{n-750}{25} = 1,645$. On en déduit alors $n$ :

$$n = 25 \times 1,645 + 750 = 791,1 \simeq 792.$$

Il doit donc avoir au moins 792 cadenas *premier prix* en stock pour que la probabilité d'être en rupture de stock soit de $5\%$.

3. On note $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de cadenas *haut de gamme* vendus par mois et on suppose qu'elle suie la loi normale d'espérance $m = 500$ et d'écart-type $\sigma$.
   (a) Quelle loi suit la variable aléatoire $\dfrac{Y-500}{\sigma}$ ?

$\dfrac{Y-500}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

   (b) Sachant que la probabilité de vendre plus de 600 cadenas *haut de gamme* au cours d'un mois est de 0.22, déterminer l'écart-type $\sigma$.
   *On arrondira à l'entier supérieur.*

On sait que $P(Y > 600) = 0.22$. Ceci équivaut à :

$$P\left(\frac{Y-500}{\sigma} > \frac{600-500}{\sigma}\right) = 0.22$$

soit

$$P\left(Y^*>\frac{600-500}{\sigma}\right)=0.22 \iff 1-P\left(Y^*\leq\frac{600-500}{\sigma}\right)=0.22$$
$$\iff P\left(Y^*\leq\frac{600-500}{\sigma}\right)=0.78$$
$$\iff \Phi\left(\frac{600-500}{\sigma}\right)=0.78$$

Avec le tableau en Annexe 2, on obtient : $\dfrac{600-500}{\sigma}=0,77$. On en déduit $\sigma$ :

$$\sigma=\frac{100}{0.77}\simeq 130$$

Ainsi $Y\hookrightarrow\mathcal{N}(500,130^2)$.

## Exercice 5 *15 points*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t)=\frac{1}{\ln(2)(t+1)} \quad \text{si } t\in[0;1] \quad \text{et} \quad f(t)=0 \quad \text{sinon.}$$

1. (a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t$.

Commençons par chercher une primitive de $f(t)=\dfrac{1}{t+1}$. $f$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(t)=t+1$. On a $u'(t)=1$. Donc,

$$\frac{u'}{u}=\frac{1}{t+1}=f(t)$$

Donc, une primitive de $f$ est donnée par :

$$F(t)=\ln(t+1)$$

Ainsi,

$$\int_0^1\frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t=[\ln(t+1)]_0^1=\ln(2)-\ln(1)=\ln(2)$$

(b) Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

On a :

- $f$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$
- $f$ est positive sur $\mathbb{R}$
- Il reste à montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1. Or,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0}0\,\mathrm{d}t}_{\text{converge et vaut }0}+\int_0^1\frac{1}{\ln(2)(t+1)}\,\mathrm{d}t+\underbrace{\int_{1}^{+\infty}0\,\mathrm{d}t}_{\text{converge et vaut }0}\\ &=\frac{1}{\ln(2)}\underbrace{\int_0^1\frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t}_{=\ln(2)\text{ ( question 1.(a))}}\\ &=\frac{1}{\ln(2)}\times\ln(2)\\ &=1\end{aligned}$$

> Ainsi, $f$ est bien une densité de probabilité.

Soit $X$ une variable aléatoire ayant pour densité $f$. On nomme $F$ la fonction de répartition de $X$.

2. (a) Calculer $F(x)$ pour tout réel $x < 0$ et pour tout réel $x > 1$.

> Pour $x < 0$, on a
> $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$$
> Pour $x > 1$, on a
> $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} \frac{1}{\ln(2)(t+1)}\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 1$$

(b) Montrer que si $x \in [0; 1]$, alors $F(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln(2)}$.

> Si $x \in [0; 1]$, on a :
> $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \frac{1}{\ln(2)(t+1)}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln(t+1)}{\ln(2)}\right]_0^x = \frac{\ln(x+1)}{\ln(2)}$$

(c) Calculer $P\left(X \leq \dfrac{1}{2}\right)$. *On arrondira à 0,01 près.*

> On sait que $F(x) = P(X \leq x)$ donc $P(X \leq \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2})$. Ainsi,
> $$P(X \leq \frac{1}{2}) = \frac{\ln(1+\frac{1}{2})}{\ln(2)} = \frac{\ln(\frac{3}{2})}{\ln(2)} = \frac{\ln(3)-\ln(2)}{\ln(2)} \simeq 0,58$$

3. (a) Justifier que pour tout réel $t$ de $[0; 1]$ on a :
$$\frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1}.$$

> Pour tout $t \in [0; 1]$, on a :
> $$1 - \frac{1}{t+1} = \frac{t+1}{t+1} - \frac{1}{t+1} = \frac{t}{t+1}$$
> Donc, on a bien
> $$\frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1}$$

(b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t+1}\mathrm{d}t$.

> En utilisant la question précédente, on obtient :
> $$\int_0^1 \frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 1\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = 1 - \ln(2)$$

(c) Justifier que $X$ admet une espérance et que :
$$E(X) = \frac{1-\ln(2)}{\ln(2)}.$$

On a (sous réserve d'existence) :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} t \times 0\,\mathrm{d}t}_{\text{converge et vaut } 0} + \int_0^1 \frac{t}{\ln(2)(t+1)}\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_{1}^{+\infty} t \times 0\,\mathrm{d}t}_{\text{converge et vaut } 0} = \frac{1}{\ln(2)}\int_0^1 \frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

Or, on vient de voir que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t = 1 - \ln(2)$. Donc, on a bien :

$$E(X) = \frac{1-\ln(2)}{\ln(2)}$$

## Exercice 6 *6 points*

Calculer l'intégrale suivante en utilisant une intégration par parties : $I = \displaystyle\int_0^1 (2x-3)e^x\,\mathrm{d}x$

Posons

$$\begin{array}{rclcrcl} u'(x) & = & e^x & \qquad & u(x) & = & e^x \\ v(x) & = & 2x-3 & & v'(x) & = & 2 \end{array}$$

D'après la formule d'intégration par parties, on a donc :

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^1 (2x-3)e^x\,\mathrm{d}x \\ &= [(2x-3)e^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x\,\mathrm{d}x \\ &= -e^1 + 3 - [2e^x]_0^1 \\ &= -e + 3 - (2e-2) \\ &= -e + 3 - 2e + 2 \\ &= -3e + 5 \end{aligned}$$

## Exercice 7 *8 points*

Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ converge et déterminer sa valeur.

Soit $M \in [0;+\infty[$, calculons la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^M \frac{t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Pour cela, calculons une primitive de la fonction $f(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$. La fonction $f$ semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(t) = 1+t^2$. On a $u'(t) = 2t$. Ainsi

$$\frac{u'}{u^2} = \frac{2t}{(1+t^2)^2} = 2f(t).$$

Une primitive de $f$ est donc donnée par :

$$F(t) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{u} = \frac{-1}{2(1+t^2)}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^M \frac{t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{2(1+t^2)}\right]_0^M \\ &= -\frac{1}{2(1+M^2)}+\frac{1}{2(1+0)} \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2(1+M^2)}.\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{M\to+\infty} -\dfrac{1}{2(1+M^2)} = 0$ donc

$$\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2}-\frac{1}{2(1+M^2)} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

## ANNEXE 1
## Formulaire lois usuelles

**Loi uniforme** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$

- Densité : $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad t\in[a,b], \\ 0 & \text{si} \quad t\notin[a,b]. \end{cases}$
- Fonction de répartition : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad x\in[a,b], \\ 1 & \text{si} \quad x>b. \end{cases}$
- Espérance : $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$
- Variance : $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

**Loi exponentielle** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

- Densité : $f(t) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si} \quad t\geq 0, \\ 0 & \text{si} \quad t<0. \end{cases}$
- Fonction de répartition : $F_X(x) = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si} \quad x\geq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x<0. \end{cases}$
- Espérance : $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$
- Variance : $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

**ANNEXE 2**
**Fonction de répartition $\Phi$ d'une variable aléatoire $X$ suivant la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;\,1)$.**

$$\Phi(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

| $x$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| 3.5 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |
| 3.6 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.7 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.8 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |