

Corrigé : Evaluation n° 2

Exercice 1 12 points

Jeudi avant les vacances, c'était le repas de Noël au lycée Malherbe. Une étude montre que :

- 66 % des élèves du lycée ont prévu de porter un pull de Noël ;
- parmi les élèves qui ont prévu de porter un pull, 5 % auront également un bonnet de Père Noël ;
- parmi ceux qui ne porteront pas de pull, 84 % porteront un bonnet de Père Noël.

On sélectionne au hasard un élève du lycée et on considère les événements suivants :

- A : "l'élève porte un pull de Noël" ;
- B : "l'élève porte un bonnet de Père Noël".

1. Donner les valeurs de $P(A)$, $P(\overline{A})$, $P_A(B)$, $P_A(\overline{B})$, $P_{\overline{A}}(B)$, $P_{\overline{A}}(\overline{B})$.

D'après l'énoncé, on a :

- $P(A) = 0,66$;
- $P_A(\overline{B}) = 0,95$;
- $P_{\overline{A}}(B) = 0,84$.

On en déduit :

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,34$;
- $P_A(B) = 1 - P_A(\overline{B}) = 0,05$;
- $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - P_{\overline{A}}(B) = 0,16$.

2. Calculer la probabilité que cet élève porte un bonnet de Père Noël.

On arrondira le résultat à 0,01 près.

D'après la formule des probabilités totales, $\{A, \overline{A}\}$ étant un système complet d'événements de probabilités non nulles :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \\ &= P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B) \\ &= 0,66 \times 0,05 + 0,34 \times 0,84 \\ &= 0,033 + 0,2856 \\ &\simeq 0,32 \end{aligned}$$

3. L'élève ne porte pas de bonnet de Père Noël. Quelle est la probabilité qu'il porte alors un pull de Noël ?

On arrondira le résultat à 0,01 près.

Il nous faut calculer $P_{\overline{B}}(A)$. D'après la formule de Bayes, on a :

$$\begin{aligned} P_{\overline{B}}(A) &= \frac{P(A) \times P_A(\overline{B})}{P(\overline{B})} \\ &= \frac{0,66 \times 0,95}{1 - 0,32} \\ &= \frac{0,627}{0,68} \\ &\simeq 0,92 \end{aligned}$$

Exercice 2 10 points

Une enquête effectuée auprès d'un échantillon représentatif de la population sportive montre qu'il y a une probabilité :

- 0.7 que la personne court le week-end
- 0.5 que la personne court durant la semaine
- 0.4 que la personne court durant la semaine et le week-end.

Notons les événements suivants :

- W : « courir le week-end »
- S : « courir durant la semaine »

Quelle est la probabilité pour que la personne :

1. court le week-end mais pas en semaine ?

$$\text{On a alors : } P(W \cap \overline{S}) = P(W) - P(W \cap S) = 0.7 - 0.4 = 0.3.$$

2. court durant la semaine ou le week-end ?

Avec les mêmes notations que précédemment, on a :

$$P(W \cup S) = P(W) + P(S) - P(W \cap S) = 0.7 + 0.5 - 0.4 = 0.8.$$

3. ne court ni la semaine ni le week-end ?

Avec les mêmes notations que précédemment, on a :

$$P(\overline{W} \cap \overline{S}) = P(\overline{W \cup S}) = 1 - P(W \cup S) = 1 - 0.8 = 0.2$$

4. court soit la semaine, soit le week-end ?

Avec les mêmes notations que précédemment, on a :

$$P(W \cap \overline{S} \cup \overline{W} \cap S) = P(W \cap \overline{S}) + P(\overline{W} \cap S) = 0.3 + P(S) - P(W \cap S) = 0.3 + 0.5 - 0.4 = 0.4$$

5. Les événements « courir la semaine » et « courir le week-end » sont-ils indépendants ?

On a $P(W \cap S) = 0.4 \neq P(W)P(S) = 0.5 \times 0.7$. Les deux événements ne sont donc pas indépendants.

Exercice 3 7 points

Une boîte de chocolats contient 8 chocolats au lait, 7 chocolats noirs et 5 chocolats blancs. Un étudiant pioche successivement et sans remise (évidemment !) deux chocolats dans la boîte.

1. Calculer la probabilité qu'il ait pioché deux chocolats blancs. On arrondira le résultat à 0.01 près

On note ainsi les événements pour $i \in \{1, 2, 3\}$:

- L_i : « il a pioché un chocolat au lait lors du i -ème piochage »
- N_i : « il a pioché un chocolat noir lors du i -ème piochage »
- B_i : « il a pioché un chocolat blanc lors du i -ème piochage »

On cherche alors $P(B_1 \cap B_2)$. On a, d'après la formule des probabilités composées :

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{5}{20} \times \frac{4}{19} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{19} = \frac{1}{19} \simeq 0.05.$$

2. Quelle est la probabilité que le deuxième chocolat pioché soit un chocolat noir (ce sont quand même les meilleurs). On arrondira le résultat à 0.01 près

Considérons $\{B_1, L_1, N_1\}$ un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(N_2) &= P(B_1 \cap N_2) + P(L_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap N_2) \\ &= P(B_1)P_{B_1}(N_2) + P(L_1)P_{L_1}(N_2) + P(N_1)P_{N_1}(N_2) \\ &= \frac{5}{20} \times \frac{7}{19} + \frac{8}{20} \times \frac{7}{19} + \frac{7}{20} \times \frac{6}{19} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{7}{19} + \frac{4}{5} \times \frac{7}{19} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{19} \\ &\simeq 0.35 \end{aligned}$$

Exercice 4 12 points

Dans chacun des cas suivants, donner la loi de X ainsi que ses paramètres (**en justifiant soigneusement**).

- On lance 25 fois de manière identique et indépendante un dé équilibré. On note X la variable aléatoire égale au nombre de numéros obtenus qui sont des multiples de 3.

X compte le nombre de succès (i.e « obtenir un numéro multiple de 3 » de probabilités $\frac{1}{3}$) lors de la répétition de 25 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = \frac{1}{3}$.

- On estime que les végétariens représentent 8% de la population en France. On choisit un français au hasard et on note X la variable aléatoire qui vaut 1 si cette personne ne mange pas de viande, 0 sinon.

X ne peut prendre que les valeurs 1 (avec probabilité 0.08) et 0. Donc, X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0.08$.

- Une coureuse essaie de battre son record au 100m. A chaque tentative, elle a une chance sur 5 de le battre. On suppose que les tentatives sont indépendantes les unes des autres. On note X le nombre de tentatives nécessaires pour battre son record.

On note succès "la coureuse bat son record" de probabilité $\frac{1}{5}$. On répète indéfiniment l'épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante. X est égale au rang du premier succès donc X suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{5}$.

- Dudley Dursley a reçu 50 cadeaux à Noël, les cadeaux étant numérotés de 1 à 50. Il choisit au hasard un cadeau. On note X la variable aléatoire égale au numéro du cadeau choisi.

X peut prendre toutes les valeurs de 1 à 50, et de manière équiprobable. Ainsi, X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; 50 \rrbracket$.

Exercice 5 16 points

On considère une urne contenant 4 boules noires, 6 boules blanches, 3 boules rouges et 7 boules vertes. On considère un jeu pour lequel la mise de départ est de 1 euro. Si on tire une boule noire, on reperd 2 euros. Si on tire une boule blanche, on gagne 4 euros. Si on tire une boule rouge, on gagne 1 euro. Enfin, si on tire une boule verte, on ne touche rien. On note X le gain (algébrique) en euros à l'issue d'un tirage.

- Justifier que le support de X est $X(\Omega) = \{-3; -1; 0; 3\}$.

On commence par miser 1 euro, si on tire une boule noire, on reperd 2 euro, dans ce cas-là, $X = -3$.
On commence par miser 1 euro, si on tire une boule blanche, on gagne 4 euro, dans ce cas-là, $X = 3$.

On commence par miser 1 euro, si on tire une boule rouge, on gagne 1 euro, dans ce cas-là, $X = 0$.
On commence par miser 1 euro, si on tire une boule verte, on ne touche rien, dans ce cas-là, $X = -1$.

2. Déterminer la loi de X .

On a $X(\Omega) = \{-3; -1; 0; 3\}$. De plus,

$$P(X = -3) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}, \quad P(X = -1) = \frac{7}{20}, \quad P(X = 0) = \frac{3}{20}, \quad P(X = 3) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

Ce que l'on peut résumer dans le tableau suivant :

x	-3	-1	0	3	Total
$P(X = x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	1

3. Déterminer l'espérance. Le jeu est-il favorable au joueur ? et la variance de la variable aléatoire X .

On a $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$ ainsi

$$E(X) = -3 \times \frac{1}{5} + -1 \times \frac{7}{20} + 0 \times \frac{3}{20} + 3 \times \frac{3}{10} = -\frac{1}{20}.$$

Comme $E(X) < 0$, en moyenne, le joueur perd de l'argent donc le jeu n'est pas favorable au joueur.

4. Déterminer la variance, puis l'écart-type.

On arrondira le résultat à 0,01 près.

D'après la formule de König-Huygens, on a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Or

$$E(X^2) = (-3)^2 \times \frac{1}{5} + (-1)^2 \times \frac{7}{20} + 0^2 \times \frac{3}{20} + 3^2 \times \frac{3}{10} = \frac{97}{20}.$$

On en déduit $V(X) = \frac{97}{20} - \left(-\frac{1}{20}\right)^2 = \frac{97}{20} - \frac{1}{400} = \frac{1939}{400}$. Ainsi l'écart-type vaut :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1939}{400}} \simeq 2,2$$

5. On note $Y = 4X - 1$. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y .

D'après la linéarité de l'espérance, on a $E(Y) = 4E(X) - 1 = -\frac{4}{20} - 1 = -\frac{24}{20} = -\frac{6}{5}$.

D'après les propriétés sur la variance, on a $V(Y) = 16V(X) = 16 \times \frac{1939}{400} = 4 \times \frac{1939}{100} = \frac{1939}{25}$.

6. On note $Z = X^2$.

(a) Déterminer le support de Z .

Les valeurs prises par Z sont obtenues en calculant les images des valeurs prises par X par l'application $h(x) = x^2$.
Ainsi on a : $h(-3) = 9$, $g(-1) = 1$, $g(0) = 0$ et $g(3) = 9$.
En conclusion, on a : $Z(\Omega) = \{0, 1, 9\}$.

(b) Déterminer la loi de Z .

On a :

- $P(Z = 0) = P(X^2 = 0) = P(X = 0) = \frac{3}{20}$
- On a :

$$\begin{aligned} P(Z = 1) &= P(X^2 = 1) \\ &= P([X = 1] \cup [X = -1]) \\ &= P(X = 1) + P(X = -1) \quad \text{car les événements sont disjoints} \\ &= 0 + \frac{7}{20} \\ &= \frac{7}{20}. \end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned} P(Z = 9) &= P(X^2 = 9) \\ &= P([X = 3] \cup [X = -3]) \\ &= P(X = 3) + P(X = -3) \quad \text{car les événements sont disjoints} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On vérifie que l'on a bien $P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 9) = 1$.

Exercice 6 14 points

Le but de cet exercice est de trouver les extrema de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}.$$

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{-x^2-y^2}(1 - 2x^2)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2xye^{-x^2-y^2}.$$

2. En déduire que f possède deux points critiques $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

On résout le système :

$$(S) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

On a alors :

$$(S) \iff \begin{cases} e^{-x^2-y^2}(1 - 2x^2) = 0 \\ -2xye^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - 2x^2 = 0 \\ -2xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 0 \end{cases}$$

f possède donc deux points critiques : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

3. Déterminer la nature de ces points critiques.

Pour déterminer leur nature, commençons par calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f . On a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2xe^{-x^2-y^2}(1-2x^2) - 4xe^{-x^2-y^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = (1-2x^2)(-2y)e^{-x^2-y^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2xe^{-x^2-y^2} + 4xy^2e^{-x^2-y^2}.$$

Pour déterminer la nature du point $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, évaluons ces dérivées partielles en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. On a alors :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{4}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$$

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = 0$$

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = -\frac{2}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$$

On a alors :

$$rt - s^2 = 4e^{-\frac{1}{2}} \times e^{-\frac{1}{2}} = 4e^{-1} > 0 \text{ et } r < 0$$

Ainsi f admet un maximum local en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ qui vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$.

Pour déterminer la nature du point $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, évaluons ces dérivées partielles en $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. On a alors :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = 4 \times \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$$

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = 0$$

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$$

On a alors :

$$rt - s^2 = 4e^{-\frac{1}{2}} \times e^{-\frac{1}{2}} = 4e^{-1} > 0 \text{ et } r > 0$$

Ainsi f admet un minimum local en $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ qui vaut $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$.

Exercice 7 14 points

1. Etudier les extrema de la fonction $V(x, y) = 2\pi x^2 + 2\pi yx$ sous la contrainte $\pi yx^2 = 500$.
On donnera à la fin du valeur approchée à 0,1 du point en lequel est atteint l'extremum.

On pose la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = \pi yx^2 - 500$. On définit alors l'ensemble

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}.$$

On remarque que :

$$g(x, y) = 0 \iff y = \frac{500}{\pi x^2}.$$

Ainsi pour $(x, y) \in A$, $V(x, y) = 2\pi x^2 + 2\pi \times \frac{500}{\pi x^2} \times x = 2\pi x^2 + \frac{1000}{x}$.

Posons alors $h(x) = 2\pi x^2 + \frac{1000}{x}$. On est alors ramené à un problème d'optimisation d'une fonction d'une variable. Cette fonction est deux fois dérivable et on a :

$$h'(x) = 4\pi x - \frac{1000}{x^2} = \frac{4\pi x^3 - 1000}{x^2}.$$

On a alors :

$$h'(x) = 0 \iff 4\pi x^3 - 1000 = 0 \iff x^3 = \frac{250}{\pi} \iff x = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}.$$

Or $h''(x) = 4\pi + \frac{2000}{x^3}$ donc $h''(\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}) = 4\pi + 8\pi = 12\pi > 0$. La fonction h possède donc un minimum local en $x = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \simeq 4,3$.

Revenons à f , si $x = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$ alors $y = \frac{500}{\pi(\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}})^2} \simeq 8,6$.

En conclusion, la fonction V possède un minimum local en $(x, y) = (4,3, 8,6)$.

2. Un fabricant de chocolats aimerait conditionner ses créations dans des boîtes cylindriques en carton. Il souhaite que le volume de ses boîtes soit de 500 cm^3 . Par ailleurs, pour des raisons évidentes d'économie, il souhaiterait minimiser la quantité de carton. Pouvez vous l'aider, en déterminant les dimensions optimales ?

On pourra utiliser la question précédente. On rappelle que le volume d'un cylindre de hauteur h et de base un disque de rayon r est $\pi r^2 h$. L'aire totale de ce cylindre est donnée par $2\pi r^2 + 2\pi r h$.

On souhaite minimiser la quantité de cartons utilisée, pour cela il faut minimiser l'aire du cylindre. Mais le cylindre doit être de volume constant égal à 500 cm^3 .

Cela revient à chercher le minimum de la fonction $V(r, h)$ sous la contrainte $\pi r^2 h = 500$. On a démontré que la fonction V admettait un minimum en $(4,3, 8,6)$. Il faut donc faire des boîtes cylindriques avec un rayon de 4,3 cm et de hauteur 8,6 cm pour qu'elles aient un volume de 500 cm^3 tout en minimisant leur surface et donc la quantité de cartons utilisée.