Corrigé : Evaluation n° 2

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, donner la loi de X ainsi que ses paramètres (**en justifiant soigneusement**).

1. Les 31 étudiants du CPES2 du lycée Malherbe ont une machine à café dans leur bâtiment. Il se trouve que seul un tiers d'entre eux consomme réellement du café en classe. On choisit un étudiant au hasard et on note X la variable aléatoire qui vaut 1 si cet étudiant boit du café, 0 sinon.

> X ne peut prendre que les valeurs 1 (avec probabilité $\dfrac{1}{3}$) et 0. Donc, X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{3}$.

2. Un professeur feignant lance une copie en haut d'un escalier de 20 marches (numérotées de 1 à 20) pour obtenir la note d'un élève. On note X la note obtenue par l'élève.

> X peut prendre toutes les valeurs de 1 à 20, et de manière équiprobable. Ainsi, X suit la loi uniforme sur $[\![1;20]\!]$.

3. On estime qu'il pleut environ 179 jours par an à Caen. Mme Fontaine prend son vélo 4 fois par semaine pendant les 28 semaines de cours de l'année. On note X le nombre de fois où Mme Fontaine arrive trempée au lycée.

> X compte le nombre de succès (*i.e* arriver trempé au lycée...) lors de la répétition de 112 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 112$ et $p = \dfrac{179}{365}$.

4. Ma voiture a eu quelques problèmes de batterie pendant les vacances. Elle ne démarre pas nécessairement du premier coup. A chaque tentative, j'ai une chance sur 3 qu'elle démarre. On note X le nombre de tentatives nécessaires pour démarrer ma voiture.

> On note succès "la voiture démarre" de probabilité $\dfrac{1}{3}$. On répète indéfiniment l'épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante. X est égale au rang du premier succès donc X suit une loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{1}{3}$.

5. Un étudiant répond au hasard aux 5 questions de ce questionnaire (c'est-à-dire qu'il choisit au hasard entre loi de Bernoulli, loi binomiale, loi uniforme et loi géométrique). On note X le nombre de bonnes réponses de l'élève.

> X compte le nombre de succès (*i.e* l'étudiant a la bonne réponse de probabilité $\dfrac{1}{4}$) lors de la répétition de 5 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 2

Un sac contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. Pour jouer une partie, on doit miser 2 euros.
On tire au hasard un jeton.

- Si on tire le numéro 10, on gagne 10 euros.
- Si on tire un numéro multiple de 3, on gagne 3 euros.
- Si on tire un multiple de 2 (qui n'est pas un multiple de 3 ni le 10), on gagne 2 euros.
- Dans les autres cas, on ne gagne rien.

On note X le gain algébrique.

1. Déterminer le support et la loi de X.

On a $X(\Omega) = \{-2, 0, 1, 8\}$. De plus,

$$P(X=-2) = \frac{3}{10}, \quad P(X=0) = \frac{3}{10}, \quad P(X=1) = \frac{3}{10}, \quad P(X=8) = \frac{1}{10}$$

Ce que l'on peut résumer dans le tableau suivant :

x	-2	0	1	8	Total
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

2. Calculer l'espérance de X. Le jeu est-il favorable au joueur ?

On a :

$$E(X) = -2 \times \frac{3}{10} + 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{3}{10} + 8 \times \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

On $E(X) > 0$, le gain est en moyenne positif, le jeu est donc favorable au joueur.

3. Calculer la variance de X. Combien vaut l'écart-type ?

D'après la formule de König-Huygens, on a : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Commençons par calculer le moment d'ordre 2 de X, on a :

$$E(X^2) = (-2)^2 \times \frac{3}{10} + 0^2 \times \frac{3}{10} + 1^2 \times \frac{3}{10} + 8^2 \times \frac{1}{10} = \frac{79}{10}.$$

On en déduit :

$$V(X) = \frac{79}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{153}{20}.$$

On a alors l'écart-type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{153}{20}} = \frac{3\sqrt{17}}{2\sqrt{5}}$.

Exercice 3

Partie I : Tirages dans une urne
Une urne $\mathcal{U}$ contient 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher.

1. On procède à 400 tirages successifs avec remise d'une boule dans $\mathcal{U}$. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la boule noire a été piochée.
   (a) Quelle est la loi de X ? On précisera $X(\Omega)$.

   > X compte le nombre de succès (*i.e* piocher une boule noire) lors de la répétition successive de 400 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = \dfrac{1}{4}$.
   > En particulier, on a $X(\Omega) = [\![0; 400]\!]$

   (b) Quelle est la probabilité d'avoir tiré 100 fois la boule noire ?
   On donnera le résultat arrondi à 0.001 près

   > On doit calculer $P(X = 100)$ et la calculatrice nous donne $P(X = 100) \simeq 0.046$.

   (c) Donner la valeur de l'espérance de X, noté $E(X)$, et vérifier que la variance de X, notée $V(X)$, est égale à 75.

   > Puisque X suit une loi binomiale, on a $E(X) = np = 400 \times \dfrac{1}{4} = 100$, et $V(X) = np(1-p) = 100 \times \dfrac{3}{4} = 75$.

2. On procède cette fois-ci dans $\mathcal{U}$ à une suite de tirages avec remise d'une boule jusqu'à obtenir la boule noire. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
   (a) Quelle est la loi de Y ? On précisera $Y(\Omega)$.

   > Y compte cette fois le nombre de tirages nécéssaires avant d'obtenir un premier succès, lors de la répétition successive d'expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc, Y suit une loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{1}{4}$.
   > En particulier, on a $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$

   (b) Quelle est la probabilité d'effectuer (strictement) moins de 10 tirages pour obtenir la boule noire ?
   On donnera le résultat arrondi à 0.01 près

   > On cherche $P(Y \leq 9)$. La calculatrice nous donne $P(Y \leq 9) \simeq 0.92$.

   (c) Donner la valeur de $E(Y)$ et vérifier que $V(Y) = 12$.

   > Puisque Y suit une loi géométrique, on a
   > $$E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$
   > et
   > $$V(Y) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{16}} = \frac{3}{4} \times \frac{16}{1} = 12$$

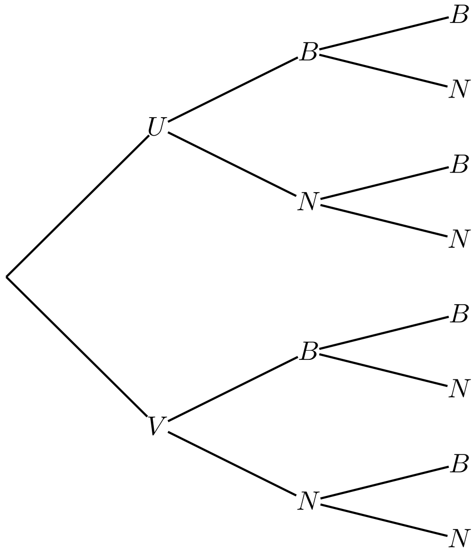
Partie II : Tirages dans une urne choisie au hasard

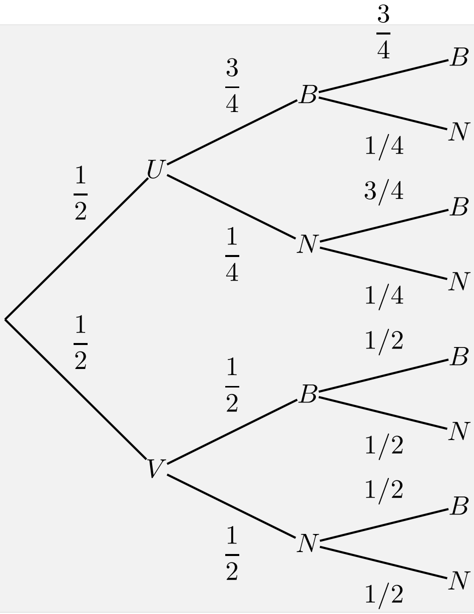
L'urne $\mathcal{U}$ contient 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher.
L'urne $\mathcal{V}$ contient 2 boules noires et 2 boules blanches indiscernables au toucher.

On réalise l'expérience suivante : on lance une pièce équilibrée. Si elle retombe sur le côté Pile, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{U}$, et si on obtient Face, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{V}$.

On introduit les événements suivants :
- U : « piocher les deux boules dans l'urne $\mathcal{U}$ »
- V : « piocher les deux boules dans l'urne $\mathcal{V}$ »
- B : « piocher une boule blanche »
- N : « piocher une boule noire »

1. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous avec les données de l'énoncé.





2. On note T la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on a pioché une boule noire lors de l'expérience.
   (a) Que vaut $T(\Omega)$?

   > On peut avoir pioché zéro, une, ou deux boules noires. Donc, $T(\Omega) = [\![0;2]\!]$.

   (b) Donner la loi de T. On vérifiera que $P(T=1) = \dfrac{7}{16}$.

   > Notons P l'évènement « obtenir Pile », F l'évènement « obtenir Face », et pour $k \in [\![0;2]\!]$, N_k l'évènement « obtenir une boule noire au k-ième tirage » et B_k l'évènement « obtenir une boule blanche au k-ième tirage ».

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(T=0) &= P(F)\times P_F(B_1)\times P_{F\cap B_1}(B_2) + P(P)\times P_P(B_1)\times P_{P\cap B_1}(B_2) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{8}+\frac{9}{32} \\ &= \frac{13}{32} \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} P(T=2) &= P(F)\times P_F(N_1)\times P_{F\cap N_1}(N_2) + P(P)\times P_P(N_1)\times P_{P\cap N_1}(N_2) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{8}+\frac{1}{32} \\ &= \frac{5}{32} \end{aligned}$$

Et donc,

$$P(T=1) = 1-P(T=0)-P(T=2) = 1-\frac{13}{32}-\frac{5}{32}=\frac{14}{32}=\frac{7}{16}$$

(c) Calculer $E(T)$ et $V(T)$.

On a :

$$E(T) = 0\times\frac{13}{32}+1\times\frac{7}{16}+2\times\frac{5}{32}=\frac{24}{32}=\frac{3}{4}.$$

Utilisons la formule de König-Huygens pour calculer $V(T)$. On a :

$$V(T)=E(T^2)-E(T)^2.$$

On calcule $E(T^2)$ à l'aide du théorème de transfert :

$$E(T^2)=0^2\times\frac{13}{32}+1^2\times\frac{7}{16}+2^2\times\frac{5}{32}=\frac{7}{16}+\frac{20}{32}=\frac{7}{16}+\frac{10}{16}=\frac{17}{16}$$

Ainsi :

$$V(T)=\frac{17}{16}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{17}{16}-\frac{9}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}.$$

(d) i. Pour A et B deux événements tels que $P(A)\neq 0$, rappeler l'expression de $P_A(B)$.

On a : $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

ii. Sachant que l'événement $[T=1]$ est réalisé, est-il plus probable d'avoir obtenu Pile ou d'avoir obtenu Face avec la pièce ?

Calculons $P_{[T=1]}(P)$ et $P_{[T=1]}(F)$. On a :

$$P_{[T=1]}(P)=\frac{P([T=1]\cap P)}{P(T=1)}=\frac{\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}{\frac{7}{16}}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{7}{16}}=\frac{3}{7}$$

Et donc,

$$P_{[T=1]}(F)=1-P_{[T=1]}(P)=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$$

Il est donc plus probable d'avoir obtenu Face.

Exercice 4

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = (x^2 - 1)\mathrm{e}^{x^3-3x}$

> La fonction f_1 semble être de la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = x^3 - 3x$ et donc $u'(x) = 3x^2 - 3$. On a alors :
>
> $$u'\mathrm{e}^u = (3x^2 - 3)\mathrm{e}^{x^3-3x} = 3(x^2 - 1)\mathrm{e}^{x^3-3x} = 3f_1(x).$$
>
> Ainsi $f_1 = \frac{1}{3}u'\mathrm{e}^u$ et une primitive de f_1 est donnée pour $x \in \mathbb{R}$ par :
>
> $$F_1(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3-3x}.$$

2. $f_2(x) = x^2(5x^3 + 7)^5$

> La fonction f_2 semble être de la forme $u'u^\alpha$ avec $u(x) = 5x^3 + 7$ et $\alpha = 5$. Ainsi $u'(x) = 15x^2$ et on a alors :
>
> $$u'u^\alpha = 15x^2(5x^3 + 7)^5 = 15f_3(x).$$
>
> Ainsi $f_2(x) = \frac{1}{15}u'u^\alpha$ et une primitive de f_3 est donnée pour $x \in \mathbb{R}$ par :
>
> $$F_2(x) = \frac{1}{15} \times \frac{1}{5+1}(5x^3 + 7)^{5+1} = \frac{1}{90}(5x^3 + 7)^6.$$

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes à l'aide des primitives usuelles :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 4x - 5)\,\mathrm{d}x\,.$

> On a :
>
> $$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 4x - 5)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x^2 - 5x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - 1 + 2 - 5 \\ &= \frac{-15}{4} \end{aligned}$$

2. $I_2 = \displaystyle\int_2^4 \frac{4x + 2}{x^2 + x + 1}\,\mathrm{d}x\,.$

> Posons $u(x) = x^2 + x + 1$. Alors, $u'(x) = 2x + 1$ et donc $\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$. Ainsi,
>
> $$\frac{4x+2}{x^2+x+1} = 2 \times \frac{u'(x)}{u(x)}\,.$$
>
> Une primitive de $x \mapsto \frac{4x+2}{x^2+x+1}$ est donc donnée par :
>
> $$x \mapsto 2\ln\left|x^2 + x + 1\right|\,.$$

Et donc,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_2^4 \frac{4x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[2\ln\left|x^2+x+1\right|\right]_2^4 \\ &= 2\ln(21) - 2\ln(7) \\ &= 2\ln(3) \end{aligned}$$

Exercice 6

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^2 te^t\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'une intégration par parties.

Posons

$$\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t & \qquad & u'(t) & = & 1 \\ v'(t) & = & e^t & & v(t) & = & e^t \end{array}$$

Alors, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_5 = \int_0^2 te^t\,\mathrm{d}t &= \int_0^2 u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [u(t)v(t)]_0^2 - \int_0^2 u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[te^t\right]_0^2 - \int_0^2 e^t\,\mathrm{d}t \\ &= 2e^2 - \left[e^t\right]_0^2 \\ &= 2e^2 - e^2 + 1 \\ &= e^2 + 1 \end{aligned}$$

Exercice 7

Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^4}\mathrm{d}x$ converge et déterminer sa valeur.

Soit $A \geq 1$. Calculons l'intégrale

$$I_A = \int_1^A \frac{3}{x^4}\,\mathrm{d}x.$$

On a :

$$\begin{aligned} I_A &= \int_1^A \frac{3}{x^4}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^A 3x^{-4}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[3\frac{x^{-3}}{-3}\right]_1^A \\ &= \left[-\frac{1}{x^3}\right]_1^A \\ &= 1 - \frac{1}{A^3} \end{aligned}$$

Puis calculons $\lim_{A\to+\infty} I_A$. On a :

$$\lim_{A\to+\infty} 1-\frac{1}{A^3}=1.$$

On en déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{3}{x^4}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

Exercice 8

Etudier la nature de l'intégrale généralisée suivante : $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

Soit $M\in[0;+\infty[$, calculons l'intégrale $\int_0^M\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$. Pour cela, calculons une primitive de la fonction $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$. La fonction f semble être de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x)=1+\mathrm{e}^x$. On a $u'(x)=\mathrm{e}^x$ et donc

$$\frac{u'}{u}=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=f(x),$$

une primitive de f est donc donnée par :

$$F(x)=\ln|u|=\ln|1+\mathrm{e}^x|=\ln(1+\mathrm{e}^x).$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\int_0^M\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x&=[\ln(1+\mathrm{e}^x)]_0^M\\&=\ln(1+\mathrm{e}^M)-\ln((1+\mathrm{e}^0)\\&=\ln(1+\mathrm{e}^M)-\ln(2).\end{aligned}$$

Or $\lim_{M\to+\infty} 1+\mathrm{e}^M=+\infty$, donc par composée de limites $\lim_{M\to+\infty}\ln(\mathrm{e}^M+1)=+\infty$, ainsi $\lim_{M\to+\infty}\ln(+\mathrm{e}^M)-\ln(2)=+\infty$ et

$$\lim_{M\to+\infty}\int_0^M\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=+\infty.$$

On en conclut que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ diverge.