Corrigé : Evaluation n° 6

Exercice 1 *15 points*

Calculer les dérivées partielles à l'ordre 1 et 2 des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^3 - y^3 - 4x^2y$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

> On a pour les dérivées partielles d'ordre 1 :
> $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 8xy \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3y^2 - 4x^2$$
> On a pour les dérivées partielles d'ordre 2 :
> $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x - 8y \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6y$$
> et
> $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -8x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \text{ d'après le théorème de Schwarz}$$

2. $f(x,y) = \mathrm{e}^x y^2$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

> On a pour les dérivées partielles d'ordre 1 :
> $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathrm{e}^x y^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\mathrm{e}^x$$
> On a pour les dérivées partielles d'ordre 2 :
> $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \mathrm{e}^x y^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\mathrm{e}^x$$
> et
> $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y\mathrm{e}^x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \text{ d'après le théorème de Schwarz}$$

3. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 10xy - 5y$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

> On a pour les dérivées partielles d'ordre 1 :
> $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 10y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 10x - 5$$
> On a pour les dérivées partielles d'ordre 2 :
> $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$
> et
> $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -10 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \text{ d'après le théorème de Schwarz}$$

4. $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2}$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

On a pour les dérivées partielles d'ordre 1 :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2y}{x^3} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x^2}$$

On a pour les dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{6y}{x^4} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-2}{x^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \text{ d'après le théorème de Schwarz}$$

Exercice 2 *14 points*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^2 - xy + \frac{1}{6}y^3 + 6.$$

1. Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f.

Commençons par les dérivées partielles premières de f, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x + \frac{1}{2}y^2$$

Puis calculons les dérivées partielles secondes de f, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = y$$

2. Déterminer le ou les point(s) critique(s) de f.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + \dfrac{1}{2}y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ -x + 2x^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ x(2x-1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = \dfrac{1}{2} \\ y = 0 \text{ ou } y = 1 \end{cases}$$

La fonction f admet donc deux points critiques : $(0,0)$ et $(\frac{1}{2}, 1)$.

3. Déterminer la nature de(s) point(s) critique(s) de f.

Pour chacun des points critiques, calculons $\delta = rt - s^2$.

- Pour $(0,0)$, on a : $\delta = 2 \times 0 - (-1)^2 = -1$. Ainsi $\delta < 0$ et f ne présente pas d'extremum local. f admet un point-col au point $(0,0)$.
- Pour $(\frac{1}{2}, 1)$, on a : $\delta = 2 \times 1 - (-1)^2 = 1$. Ainsi $\delta > 0$ et f présente un extremum local. Comme $r = 2 > 0$, cet extremum est en fait un minimum local atteint en $(\frac{1}{2}, 1)$.

Exercice 3 *12 points*

Etudier les extrema de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte : $y - 2x = 5$.

On pose la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = y - 2x - 5$. On définit alors l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$.
On remarque que :

$$g(x, y) = 0 \iff y = 2x + 5.$$

Ainsi pour $(x, y) \in A$, $f(x, y) = x^2 + (2x + 5)^2 = 5x^2 + 20x + 25$.
Posons alors $h(x) = 5x^2 + 20x + 25$. On est alors ramené à un problème d'optimisation d'une fonction d'une variable. Cette fonction est deux fois dérivables et on a :

$$h'(x) = 10x + 20.$$

On a alors :

$$h'(x) = 0 \iff 10x + 20 = 0 \iff x = -2.$$

Or $h''(x) = 10$ donc $h''(-2) = 10 > 0$. La fonction h possède donc un minimum local en $x = -2$.
Revenons à f, si $x = -2$ alors $y = 2 \times (-2) + 5 = 1$.
En conclusion, la fonction f possède un minimum local en $(x, y) = (-2, 1)$. Ce minimum vaut $f(-2, 1) = (-2)^2 + 1^2 = 5$.

Exercice 4 *23 points*

Soit f la fonction de deux variables définie par $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2xy - 6x$.

1. Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f.

Commençons par les dérivées partielles premières de f, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2y - 6 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 8y - 2x$$

Puis calculons les dérivées partielles secondes de f, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 8$$

2. **Optimisation sans contrainte**

   (a) Déterminer le(s) point(s) critique(s) de f sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2y - 6 = 0 \\ 8y - 2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(4y) - 2y = 6 \\ x = 4y \end{cases} \iff \begin{cases} 6y = 6 \\ x = 4y \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

La fonction f admet donc un point critique : $(4, 1)$.

   (b) Déterminer la nature du ou des points critiques.

Calculons $\delta = rt - s^2$ pour $(4, 1)$. On a : $\delta = 2 \times 8 - (-2)^2 = 12$. Ainsi $\delta > 0$ et $r > 0$ donc f possède un minimum local en $(4, 1)$.

3. **Optimisation sous contrainte** : on souhaite résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$(P) \begin{cases} \text{Optimiser } f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2xy - 6x \\ \text{sous la contrainte } y - x = 4 \end{cases}$$

Résoudre ce problème d'optimisation sous contrainte (i.e. déterminer les extremums de f sous la contrainte $y - x = 4$).

On pose la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = y - x - 4$. On définit alors l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$. On remarque que :

$$g(x, y) = 0 \iff y = x + 4.$$

Ainsi pour $(x, y) \in A$, $f(x, y) = x^2 + 4(x + 4)^2 - 2x(x + 4) - 6x = 3x^2 + 18x + 64$.
Posons alors $h(x) = 3x^2 + 18x + 64$. On est alors ramené à un problème d'optimisation d'une fonction d'une variable.
Cette fonction est deux fois dérivables et on a :

$$h'(x) = 6x + 18.$$

On a alors :

$$h'(x) = 0 \iff 6x + 18 = 0 \iff x = -3.$$

Or $h''(x) = 6$ donc $h''(-3) = 10 > 0$. La fonction h possède donc un minimum local en $x = -3$.
Revenons à f, si $x = -3$ alors $y = (-3) + 4 = 1$.
En conclusion, la fonction f possède un minimum local en $(x, y) = (-3, 1)$. Ce minimum vaut $f(-3, 1) = 37$.