Corrigé : Evaluation n° 1

Exercice 1

Une étude sur l'ensemble des personnes ayant exercé un emploi en France en 2016 a permis d'établir que :
- 30% des personnes sont âgées de plus de 50 ans ;
- $22,3\%$ des personnes âgées de plus de 50 ans travaillent à temps partiel ;
- $82,7\%$ des personnes âgées de moins de 50 ans travaillent à temps plein.

On interroge au hasard une personne ayant occupé un emploi en 2016 et on note :
- S l'évènement « la personne était âgée de plus de 50 ans » ;
- E l'évènement « la personne occupait un emploi à temps plein ».

1. Donner les valeurs de
$$P(S)\ ;\ P(\overline{S})\ ;\ P_S(E)\ ;\ P_S(\overline{E})\ ;\ P_{\overline{S}}(E)\ ;\ P_{\overline{S}}(\overline{E})$$

> On a :
> $$P(S) = 0.3, \quad P(\overline{S}) = 0.7, \quad P_S(E) = 0.777, \quad P_S(\overline{E}) = 0.223, \quad P_{\overline{S}}(E) = 0.827, \quad P_{\overline{S}}(\overline{E}) = 0.173$$

2. Calculer $P(S \cap \overline{E})$ et interpréter le résultat.

> On a :
> $$P(S \cap \overline{E}) = P(S)P_S(\overline{E}) = 0.3 \times 0.223 = 0.0669.$$
> Cela signifie qu'environ 7% des personnes ont plus de 50 ans et occupent un travail à temps partiel.

3. Montrer que la probabilité qu'une personne occupe en 2016 un emploi à temps partiel est égale à $0,188$.

> On cherche à calculer $P(\overline{E})$. En considérant $\{S, \overline{S}\}$ un système complet d'événements et en appliquant la formule des probabilités totales, on a :
> $$\begin{aligned} P(\overline{E}) &= P(S \cap \overline{E}) + P(\overline{S} \cap \overline{E}) \\ &= P(S)P_S(\overline{E}) + P(\overline{S})P_{\overline{S}}(\overline{E}) \\ &= 0.0669 + 0.7 \times 0.173 \\ &= 0.0669 + 0.1211 \\ &= 0.188 \end{aligned}$$
> La probabilité qu'une personne occupe en 2016 un emploi à temps partiel est bien égale à $0,188$.

4. La personne interrogée occupait un emploi à temps partiel. Quelle est la probabilité qu'elle ait plus de 50 ans ?

> On cherche à calculer $P_{\overline{E}}(S)$, on a :
> $$P_{\overline{E}}(S) = \frac{P(\overline{E} \cap S)}{P(\overline{E})} = \frac{0.0669}{0.188} = \frac{669}{1880} \simeq 0.36.$$
> La probabilité que la personne ait plus de 50 ans sachant qu'elle occupe un emploi à temps partiel est de $\boxed{0.36}$.

Exercice 2

A leur retour de vacances, les étudiants du CPES ont décidé de prendre de bonnes résolutions :
- R_1 : « Je ne réviserai plus mes devoirs à la dernière minute »
- R_2 : « Je ne sortirai plus la veille d'un examen ».

La probabilité que les étudiants révisent un devoir en avance est de 0.6 et la probabilité qu'ils ne sortent pas la veille d'un devoir est de 0.7.

1. En supposant que la résolution 1 est indépendante de la résolution 2, calculer la probabilité que l'étudiant ne sorte pas la veille du devoir et qu'il ne révise pas à la dernière minute.

> On cherche $P(R_1 \cap R_2)$ comme on suppose les événements indépendants, on a :
>
> $$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2) = 0.6 \times 0.7 = 0.42$$
>
> La probabilité que l'étudiant ne sorte pas la veille du devoir et qu'il ne révise pas à la dernière minute est de $\boxed{0.42}$.

2. Il est toutefois clair que les deux sont en fait assez corrélés.
On suppose que $P(R_1 \cup R_2) = 0.5$, calculer alors la probabilité que l'étudiant ne sorte pas la veille du devoir et qu'il ne révise pas à la dernière minute

> En utilisant la formule de Poincaré, on a :
>
> $$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) + P(R_2) - P(R_1 \cup R_2) = 0.6 + 0.7 - 0.5 = 0.8$$
>
> La probabilité que l'étudiant ne sorte pas la veille du devoir et qu'il ne révise pas à la dernière minute est dans ce cas de $\boxed{0.8}$.

Exercice 3

Une urne contient initialement 4 boules noires, 6 boules rouges et 10 boules blanches.
On tire deux boules successivement et **sans remise**.

1. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges.

> On note pour $i = 1$ ou 2 l'événement R_i : "obtenir une boule rouge au i-ème tirage. On cherche alors $P(R_1 \cap R_2)$.
> D'après la formule des probabilités composées, on a :
>
> $$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P_{R_1}(R_2) = \frac{6}{20} \times \frac{5}{19} = \frac{3}{10} \times \frac{5}{19} = \frac{15}{190} = \frac{3}{38}.$$

2. Calculer la probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche.

> On note pour $i = 1$ ou 2 les événements B_i : "obtenir une boule blanche au i-ème tirage et N_i : "obtenir une boule noire au i-ème tirage.
> On cherche alors $P(B_2)$. En utilisant le système complet d'événements $\{B_1, R_1, N_1\}$ et la formule des probabilités totales, on a :
>
> $$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap B_2) \\ &= P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P(R_1)P_{R_1}(B_2) + P(N_1)P_{N_1}(B_2) \\ &= \frac{10}{20} \times \frac{9}{19} + \frac{6}{20} \times \frac{10}{19} + \frac{4}{20} \times \frac{10}{19} \\ &= \frac{5}{10} \times \frac{9}{19} + \frac{3}{5} \times \frac{10}{19} + \frac{2}{10} \times \frac{10}{19} \\ &= \frac{45 + 30 + 20}{190} \\ &= \frac{95}{190} = \frac{19}{38} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$
>
> La probabilité que la deuxième boule soit blanche est donc de $\boxed{0.5}$.

Exercice 4

Tous les résultats numériques de cette partie seront donnés à $0,01$ *près.*

On s'intéresse dans cet exercice à deux statistiques. L'une sur les émissions de gaz à effet de serre par habitants, l'autre sur la part des énergies renouvelables dans la consommation d'énergie.

1. Le tableau ci-dessous (*source INSEE*) donne les émissions françaises de gaz à effet de serre en tonnes par habitant :

Année	Rang de l'année x_i	Émissions de gaz à effets de serre
2010	1	$7,3$
2011	2	$6,9$
2012	3	$6,9$
2013	4	$6,8$
2014	5	$6,4$
2015	6	$6,4$
2016	7	$6,4$
2017	8	$6,5$
2018	9	$6,2$

(a) Représenter le nuage de points associé à la série $(x_i, y_i)_{i=1,\cdots,9}$ dans un repère orthogonal. On prendra comme unité pour l'axe des abscisses 2 cm pour une année et pour l'axe des ordonnées 1 cm pour $0,1$ tonne.

(b) Calculer la moyenne et l'écart-type des émissions de gaz à effet de serre.

> Avec la calculatrice, on obtient pour la moyenne $m \simeq 6,64$ et pour l'écart-type $\sigma \simeq 0,33$.

(c) Donner le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique. Un ajustement affine est-il approprié ?

> Le coefficient de corrélation linéaire de cette série statistique vaut $r \simeq -0,91$. Il est proche de 1 donc un ajustement affine est approprié.

(d) Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés.

> A l'aide de la calculatrice, on obtient l'équation la droite d'ajustement affine :
>
> $$y = -0,12x + 7,23.$$

(e) En déduire une prévision pour l'année 2050.

> L'année 2050 correspond au rang 41. A l'aide de l'ajustement affine, on peut prédire que les émissions de gaz à effet de serre vaudront
>
> $$y = -0,12 \times 41 + 7,23 = 2,31$$
>
> soit 2,31 tonnes par habitant.

(f) En quelle année peut-on estimer que les émissions françaises de gaz à effet de serre descendront sous les 2 tonnes par habitant ?

> On cherche le rang de l'année pour laquelle les émissions françaises de gaz à effet de serre descendront sous les 2 tonnes par habitant. On doit donc résoudre l'inéquation suivante :
>
> $$-0,12x + 7,23 < 2 \iff x > \frac{5,23}{0,12}$$
>
> or $\dfrac{5,23}{0,12} \simeq 43,58$. Ainsi c'est à partir du rang 44 i.e. de l'année 2053 que les émissions françaises de gaz à effet de serre descendront sous les 2 tonnes par habitant.

2. Le tableau ci-dessous *(source Eurostat)* donne la part des énergies renouvelables dans la consommation finale brute d'énergie (en $\%$) :

Pays	Part des énergies renouvelables x_i	Pays	Part des énergies renouvelables x_i
Allemagne	$14,8$	Italie	$17,4$
Autriche	$33,5$	Lettonie	$37,2$
Belgique	$8,7$	Lituanie	$25,6$
Bulgarie	$18,8$	Luxembourg	$5,4$
Chypre	$9,3$	Malte	$6,0$
Croatie	$28,3$	Pays-Bas	$6,0$
Danemark	$32,2$	Pologne	$11,3$
Espagne	$17,3$	Portugal	$28,5$
Estonie	$28,8$	Rep. tchèque	$14,9$
Finlande	$38,7$	Roumanie	$25,0$
France	$16,0$	Royaume-Uni	$9,3$
Grèce	$15,2$	Slovaquie	$12,0$
Hongrie	$14,2$	Slovénie	$21,3$
Irlande	$9,5$	Suède	$53,8$

(a) Quel est le type de la série statistique $(x_i)_{i=1,\cdots,28}$?

> Il s'agit d'une série statistique univariée.

(b) Déterminer la médiane ainsi que les premier et troisième quartiles. Donner l'écart interquartile.

> A l'aide de la calculatrice, on obtient que :
> - la médiane vaut $M_e \simeq 16,65$
> - le premier quartile vaut $Q_1 \simeq 9,5$
> - le troisième quartile vaut $Q_3 \simeq 28,3$
> - l'écart interquartile vaut $Q_3 - Q_1 \simeq 18,8$

(c) Calculer la moyenne de cette série.

> A l'aide de la calculatrice, on obtient que la moyenne vaut $\bar{x} = 19,96$.

(d) Déterminer l'écart-type de cette série statistique.

> A l'aide de la calculatrice, on obtient que l'écart-type vaut $\sigma x = 11,57$.

Exercice 5

Tous les résultats numériques de cette partie seront donnés à $0,01$ près.
Le tableau suivant donne la réparition des revenus pour $10\,000$ personnes en France.

Salaire annuel en euros	Effectif (x_i)
$[10\,000 ; 20\,000[$	7118
$[20\,000 ; 30\,000[$	1481
$[30\,000 ; 40\,000[$	602
$[40\,000 ; 50\,000[$	268
$[50\,000 ; 60\,000[$	143
$[60\,000 ; 70\,000[$	79
$[70\,000 ; 80\,000[$	71
$[80\,000 ; 90\,000[$	58
$[90\,000 ; 100\,000[$	32
$[100\,000 ; +\infty[$	148

1. Quel est le type de cette série statistique (x_i) ?

> Il s'agit d'une série statisque univariée regroupée par classe.

2. Tracer son histogramme. On prendra 1 cm pour $10\,000$ euros en abscisse et 2 cm pour 1000 personnes en ordonnée.
3. Calculer à partir du tableau le salaire annuel moyen de ce groupe de $10\,000$ personnes. On associera la valeur moyenne de $225\,240$ euros à la classe $[100\,000; +\infty[$.

> Puis, calculons la moyenne :
>
> $$\bar{x} = \frac{7118 \times 15000 + 1481 \times 25000 + \ldots + 95000 \times 32 + 225240 \times 148}{10000} \simeq 23655,55$$
>
> Le salaire annuel moyenne de ce groupe de 10 000 personnes est donc de 23566,55 euros.

Exercice 6

Dans la classe des L2 du CPES du lycée Malherbe, les étudiants décident, à l'occasion des fêtes de fin d'année, d'organiser un *Secret Santa*. Chaque étudiant tire au hasard le nom d'un étudiant de la classe et doit lui offrir un cadeau.

Dans cette classe, 34% des étudiants ont suivi au lycée la spécialité « SES », 45% suivent la spécialité « HGGSP », le reste ayant suivi la spécialité « Mathématiques »

On suppose que :
- 60% des étudiants ayant suivi la spécialité « Mathématiques » offrent de la nourriture.
- 45% des étudiants ayant suivi la spécialité « HGGSP » offrent un jeu de société.
- 55% des étudiants offrent de la nourriture.

On prend une personne au hasard dans la classe et on observe le cadeau qu'elle a offert. On considère les événements suivants :
- M : « L'étudiant a suivi la spécialité Mathématiques. »
- P : « L'étudiant a suivi la spécialité HGGSP. »
- C : « L'étudiant a suivi la spécialité SES »
- N : « L'étudiant a offert de la nourriture. »
- J : « L'étudiant a offert un jeux de société. »

1. Donner, sans justifier, la valeur des probabilités suivantes :
   On n'hésitera pas à tracer un arbre pondéré.

$$P(M) \quad P(P) \quad P(C) \quad P(J) \quad P_M(N) \quad P_M(J) \quad P_P(J) \quad P_P(N)$$

> On a :
>
> $P(M) = 0.21,\ P(P) = 0.45,\ P(C) = 0.34,\ P(J) = 0.45,\ P_M(N) = 0.6,\ P_M(J) = 0.4,\ P_P(J) = 0.45,\ P_P(N) = 0.55$

2. Calculer la probabilité que la personne ait suivi la spécialité mathématiques et ait offert un jeu de société.

> On souhaite calculer $P(M \cap J)$, on a :
>
> $$P(M \cap J) = P(M)P_M(J) = 0.21 \times 0.4 = 0.084$$

3. On pose $x = P_C(N)$.
   (a) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que

$$0,55 = 0,3735 + 0,34x$$

> On considère $\{M, P, C\}$ le système complet d'événements et on a, d'après la formule des probabilités totales :
>
> $$P(N) = P(M)P_M(N) + P(P)P_P(N) + P(C)P_C(N)$$
>
> En posant $x = P_C(N)$ et en remplaçant avec les valeurs de l'énoncé, on obtient :
>
> $$0.55 = 0.21 \times 0.6 + 0.45 \times 0.55 + 0.34x$$
>
> soit l'équation :
>
> $$0.55 = 0.3735 + 0.34x$$

   (b) En déduire la valeur de $P_C(N)$. On donnera une valeur approchée à $0,01$ près.

> Pour déterminer $P_C(N)$, il suffit de résoudre l'équation de degré 1 précédente :
>
> $$0.55 = 0.3735 + 0.34x \iff 0.34x = 0.1765 \iff x = \frac{0.1765}{0.34} \simeq 0.52$$

4. Calculer la probabilité que l'étudiant ait suivi la spécialité SES sachant qu'il a offert de la nourriture. On donnera une valeur approchée à $0,01$ près.

> On cherche $P_N(C)$. On a :
>
> $$P_N(C) = \frac{P(C \cap N)}{P(N)} = \frac{P(C) \times P_C(N)}{P(N)} = \frac{0.34 \times 0.52}{0.55} = 0.32$$