Fonctions de deux variables

Exercice 1 ($\star$)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = 4x^2y - 3xy^3 + 6x.$$

Calculer $f(1,0)$, $f(0,1)$, $f(1,1)$, $f(1,2)$ et $f(2,1)$.

Exercice 2 ($\star$)

Calculer les dérivées partielles à l'ordre 1 et 2 des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$:

1. $f(x,y) = x + y + xy$
2. $f(x,y) = x^3 + y^3$
3. $f(x,y) = 4x^2y + 2x^3 - 3xy + 2x + 1$
4. $f(x,y) = x^2 - y^2 - 3x^2y^2$
5. $f(x,y) = y^7 - x^3y$
6. $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 2x - 10y + 2xy + 6$
7. $f(x,y) = x^2 - xy + \frac{1}{6}y^3 + 6$

Exercice 3 ($\star\star$)

Pour les fonctions suivantes, déterminer leur domaine de définition et calculer les dérivées partielles à l'ordre 1 et 2 :

1. $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2}$
2. $f(x,y) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$
3. $f(x,y) = x^2\sqrt{y}$

Exercice 4 ($\star\star\star$)

Déterminer le domaine de définition et calculer les dérivées partielles à l'ordre 1 et 2 de la fonction :

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y}{x^2 + 1}$$

Exercice 5 ($\star\star$)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = 2x^2 - y^2 - xy - 1$$

1. Calculer les dérivées partielles premières de f.
2. La fonction f est-elle différentiable en $(1,1)$?
3. Déterminer sa différentielle $df_{(1,1)}$.
4. En déduire la valeur de $f(1.01, 1.02)$.
5. Est-elle deux fois différentiable en $(1,1)$?

Exercice 6 ($\star\star\star$)

La fonction de production d'une firme est définie par :

$$f(K,L) = 20K^{0,75}L^{0,25}$$

où les facteurs de production sont le capital K et le travail L.

1. En économie, comment s'appelle une telle fonction ?
2. On appelle **productivité moyenne du facteur capital** la quantité $\frac{f(K,L)}{K}$ et on définit de même la **productivité moyenne du facteur travail** par la quantité $\frac{f(K,L)}{L}$.
   Exprimer en fonction de K et de L la productivité moyenne de chaque facteur de production.
3. On appelle **productivité marginale** la variation de production engendrée par une variation d'un des facteurs de production.
   Par exemple, la **productivité marginale du travail** est la variation de la production engendrée par l'ajout d'un travailleur supplémentaire.
   Dans le cas d'une fonction admettant des dérivées partielles continues, ce sont les dérivées partielles de la fonction de production par rapport à chaque facteur de production.
   Exprimer en fonction de K et de L la productivité marginale de chaque facteur de production.
4. On définit **l'élasticité partielle de la production f par rapport au capital K** par la quantité :

   $$e_K = K\frac{\frac{\partial f}{\partial K}}{f(K,L)}$$

   De la même manière, on définit **l'élasticité partielle de la production f par rapport au travail L** par la quantité :

   $$e_L = L\frac{\frac{\partial f}{\partial L}}{f(K,L)}$$

   Calculer l'élasticité partielle de la production f par rapport au capital K, puis, calculer l'élasticité partielle de la production f par rapport au travail L.
   Que remarquez-vous ?

   Remarque : L'élasticité de la production par rapport au capital « mesure la dépendance » de la production par rapport au capital. Quand le capital augment de $x\%$ la production augment de $e_K \times x\%$.