Optimisation et convexité

Exercice 1 ($\star$)

Étudier la convexité des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 + 1$ sur $\mathbb{R}$
2. $g(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Exercice 2 ($\star\star$)

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
2. On note f' la dérivée de la fonction f.
   (a) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2-x}{x^3}$.
   (b) Donner le tableau de variation de la fonction f.
3. (a) Étudier la convexité de la fonction f.
   (b) La courbe représentative de la fonction f a-t-elle un point d'inflexion ?
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 3 ($\star\star\star$)

On considère la fonction f définie et dérivable par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 3}{x^2 + 3}.$$

1. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{x^4 + 9x^2}{\left(x^2+3\right)^2}$ où f' est la fonction dérivée de f.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f''(x) = \frac{-6x\left(x^2 - 9\right)}{\left(x^2+3\right)^3}.$$
4. Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe ou concave.
5. La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion ?

Exercice 4 ($\star\star$)

Soit $P(t)$ la population d'une ville où t est en années et $P(t)$ est en milliers d'habitants.
Que signifient les énoncés suivants en ce qui concerne les signes de la dérivée et de la dérivée seconde ?

1. « La population a augmenté de moins en moins vite ».
2. « La population est restée stable les trois premières années ».
3. « La population diminue plus rapidement ».
4. « La population a augmenté au même taux ».

Exercice 5 ($\star\star$)

On considère la fonction $f(x) = \frac{16+x^2}{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
3. Calculer les dérivées première et seconde de $f(x)$.
4. Déterminer le(s) extremum(s) de $f(x)$.
5. Construire le tableau de variations de $f(x)$ et donner l'allure du graphe de f en y précisant le(s) extremum(s)
6. Le(s) extremum(s) de f sont-ils globaux ?

Exercice 6 ($\star\star$)

On considère la fonction $f(x) = x^4 - 32x^2 + 150$.

1. Déterminer les limites de f lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
2. Calculer les dérivées première et seconde de $f(x)$.
3. Déterminer le(s) extremum(s) de $f(x)$.
4. Construire le tableau de variation de $f(x)$ et donner l'allure du graphe de f en y précisant le(s) extremum(s).
5. Le(s) extremum(s) de f sont-ils globaux ?

Exercice 7 ($\star\star\star$)

Etudier les extrema de la fonction définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in [0,1]$,

$$f(x) = x\sqrt{1-x^2}$$

Exercice 8 ($\star\star\star$)

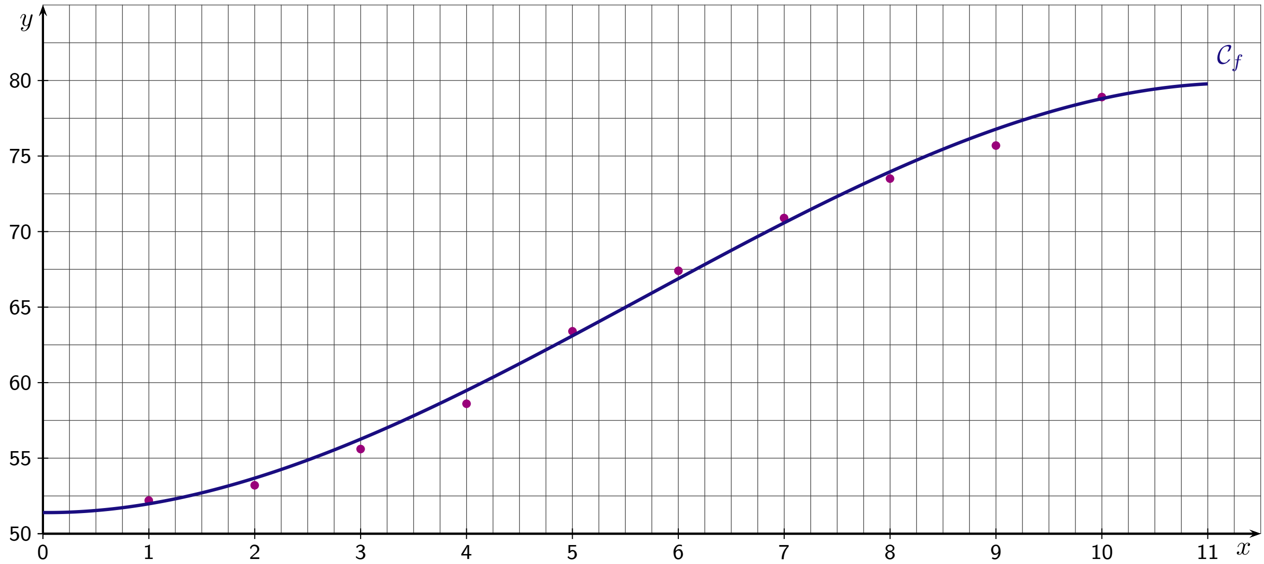
Le tableau ci-dessous représente l'évolution du taux d'endettement des ménages, en pourcentage du revenu disponible brut, en France de 2001 à 2010.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taux d'endettement y_i	$52,2$	$53,2$	$55,6$	$58,6$	$63,4$	$67,4$	$70,9$	$73,5$	$75,7$	$78,9$

Une estimation de l'évolution du taux d'endettement des ménages est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;11]$ par :

$$f(x) = -0,04x^3 + 0,68x^2 - 0,06x + 51,4$$

où x est le nombre d'années écoulées depuis 2000.



1. (a) Calculer la valeur estimée du taux d'endettement des ménages en 2009.
   (b) Calculer le pourcentage d'erreur par rapport au taux réel d'endettement des ménages en 2009.
2. (a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
   (b) Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.
   (c) La courbe $\mathcal{C}_f$ a-t-elle un point d'inflexion ?
3. Le rythme de croissance instantané du taux d'endettement est assimilé à la dérivée de la fonction f.
   Au cours de quelle année, le rythme de croissance du taux d'endettement a-t-il commencé à diminuer ?