Intégration sur un segment

Exercice 1 ($\star\star$)

Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^2 - 3x + 7$
2. $f_2(x) = -\dfrac{3}{x}$
3. $f_3(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{x^3}$
5. $f_5(x) = (7x+1)^8$
6. $f_6(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}$
7. $f_7(x) = \dfrac{1}{x}\left(\ln(x)\right)^2$
8. $f_8(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$
9. $f_9(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x^2+2x}$

Exercice 2 ($\star\star$)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-2}^{3} (x^3 + x - 2)\mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{3}^{11} \sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}\mathrm{d}t$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{1}^{2} \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$
5. $I_5 = \displaystyle\int_{0}^{2} \frac{2x-1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$

Exercice 3 ($\star\star\star$)

Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties :

1. $I_1 = \displaystyle\int_{0}^{1} te^{2t}\mathrm{d}t$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{1}^{2} (t+1)\ln(t)\mathrm{d}t$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{0}^{1} (x^2+1)e^{3x}\mathrm{d}x$

Exercice 4 ($\star\star\star$)

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

1. $I_1 = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$ en posant $t = x+1$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{1}^{4/3} \frac{x^2}{(3x-2)^5}\mathrm{d}x$ en posant $t = 3x-2$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{1}^{2} \frac{e^{2x}}{1-e^x}\mathrm{d}x$ en posant $t = e^x$

Application à l'économie

Exercice 5 ($\star\star\star$)

Déterminer le profit $\Delta\pi$ gagné par un accroissement le production de 2 à 4 unités sachant que le profit marginal de la firme est donné par

$$\pi'(x) = -3x^2 + 80x + 140.$$

Exercice 6 ($\star\star\star$)

Le coût marginal de production d'un certain type d'article est donné par $\mathcal{C}_m = 325 - 1200e^{-2x}$ (unités monétaires) où x est le nombre d'articles produits.

1. Quel est le coût total de production de x articles si l'on sait que la production de deux articles coûte 8 (u.m.) ?
2. Quel est le coût total de production de trois articles ?

Exercice 7 ($\star\star\star$)

Pour un certain type de montres, le revenu marginal est donné par

$$\mathcal{R}_m = 3000 - \frac{2000}{(1+x)^2} \text{ (dollars)},$$

où la demande x est exprimée en centaines de montres. Si $x = 0$, le revenu total est nul.
Déterminer le revenu total correspondant à une demande de 300 montres.

Exercice 8 ($\star\star\star$)

Trouver la fonction de demande $Q(p)$ si l'élasticité $\frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp}$ est donnée par $-\frac{1}{Q}\left(5p + 2p^2\right)$ et si Q vaut 500 lorsque $p = 10$.