9. Fonctions de deux variables

En Mathématiques, « évident » est le mot le plus dangereux.

Eric Temple Bell

L'objectif de ce chapitre est de se familiariser avec les fonctions numériques de deux variables réelles, qui associent un nombre à tout couple de nombres. Dans ce chapitre, vous apprendrez notamment à calculer et utiliser les dérivées partielles, interpréter des lignes de niveau...

9.1 Introduction

Considérons une unité de production qui fabrique 2 produits : A en quantité x et B en quantité y. Le produit A demande n_A heures de travail par unité produite, le produit B : n_B. Les quantités n_A et n_B sont fixées, en revanche on peut décider des quantités produites x et y. Le nombre d'heures de travail nécessaire est fonction de x et de y à la fois : à tout couple de nombres positifs (x, y) on associe un nombre : la quantité de travail notée T,

$$T = n_A x + n_B y.$$

On note $\mathbb{R}^2$ l'ensemble de tous les couples (x, y) formés de deux réels x et y. Ici les quantités ne pouvant être que positives, on dit que la quantité de travail T est une fonction des deux variables (x, y), définie sur le sous-ensemble D_T des couples de nombres positifs.

$$(x, y) \in D_T \mapsto T(x, y) = n_A x + n_B y$$

Remarque :

- *Pour représenter T, on ne pourra pas utiliser une courbe d'un plan : chacune des variables x et y peut prendre, indépendamment de l'autre, n'importe quelle valeur positive. Si on représente toutes les valeurs possibles de x sur un axe, et celles de y sur un autre, x et y décrivent toute une partie d'un plan, et il faut un troisième axe pour représenter $T(x,y)$. Les représentations d'une fonction de deux variables se font dans l'espace, à trois dimensions.*

- *Si $n_A = 50$ et $n_B = 5$, une variation d'une unité de x engendre une variation de T 10 fois plus grande qu'une variation d'une unité de y.*
  *Pour les fonctions d'une variable, le lien entre la variation de la variable et celle de la fonction est la dérivée. Pour une fonction de deux variables, il faudra disposer de deux quantités analogues à la dérivée d'une fonction d'une variable: ce seront **les dérivées partielles**.*

- *Si on considère que la valeur de T est fixée par la capacité de travail T_0 de l'unité de production, alors x et y ne peuvent plus varier indépendamment : le choix de l'une d'elles détermine l'autre, x et y ne décrivent plus un plan, mais une courbe, ici la droite d'équation $n_A x + n_B y = T_0$. On parle alors de **courbe de niveau.***

9.2 Ensemble de définition d'une fonction de deux variables

Définition 9.1 (Couple de $\mathbb{R}^2$) Deux nombres, x et y, forment un couple noté (x,y). Ce couple est ordonné ce qui signifie que $(2,10)$ et $(10,2)$ sont considérés comme étant des couples différents.
L'ensemble de tous les couples de nombres réels est noté $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
De façon générale, l'ensemble des couples (x,y) où x est dans un ensemble D_1 et y dans un ensemble D_2 est noté $\mathrm{D}_1\times\mathrm{D}_2$.

Exemple 9.1 L'ensemble de tous les couples (x,y) formés par un nombre x positif et un nombre y négatif est noté $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^-$.

Il est possible d'ajouter deux couples ou de multiplier un couple par un nombre réel :

$$\begin{cases} (x,y)+(x',y') = (x+x',y+y') \\ \lambda(x,y) = (\lambda x,\lambda y),\ \text{où } \lambda\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Exemple 9.2

- $(1,2)+(3,4)$ $=(4,6)$.
- $-2(5,8)$ $=(-10,-16)$.
- $3(-5,3)-(1,2)$ $=(-15,9)+(-1,-2)=(-16,7)$

Définition 9.2 Une fonction numérique de deux variables est une fonction qui à un couple (x,y) associe un nombre réel dépendant de x et de y.

Exemple 9.3

1. $f:(x,y)\mapsto xy+x^2$
2. $g:(x,y)\mapsto \sqrt{x}+\sqrt{y}$
3. $h:(x,y)\mapsto \dfrac{1}{xy}$

Définition 9.3 Soit f une fonction numérique de deux variables, on appelle **domaine de définition de** f et on note $\mathcal{D}_f$, l'ensemble des couples (x,y) pour lesquels l'expression $f(x,y)$ est bien définie.

Exemple 9.4 Reprenons les trois exemples précédents, on a :

1. $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^2$
2. $\mathcal{D}_g=\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$
3. $\mathcal{D}_h=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$

Exercice 9.1 Soit f la fonction définie par $f(x,y)=x^2y+3y$.

1. Déterminer son domaine de définition.

   On a $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^2$.

2. Calculer l'image par f du couple $(2,1)$ et du couple $(1,2)$.

   L'image par f du couple $(2,1)$ est $f(2,1)=2^2\times1+3\times1=7$.
   L'image par f du couple $(1,2)$ est $f(1,2)=1^2\times2+3\times2=8$.

Exercice 9.2 Soit f la fonction définie par $f(x,y)=\sqrt{x^2-2y}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.

   Comme la racine est définie sur $\mathbb{R}^+$, il faut que $x^2-2y\geqslant 0$, le domaine est donc $\mathcal{D}_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2\geqslant 2y\}$.

2. Calculer, quand c'est possible, l'image par f des couples suivants : $(2;1)$, $(1;4)$, $(3;0)$ et $\left(2t;t^2\right)$ pour $t \geqslant 0$.

- Image de $(2,1)$: on a bien $2^2 = 4 \geqslant 2$ donc $(2,1) \in \mathcal{D}_f$. Ainsi :

$$f(2,1) = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}.$$

- Image de $(1,4)$: on a $1^2 = 1 < 2 \times 4 = 8$ donc $(1,4) \notin \mathcal{D}_f$. On ne peut donc pas calculer son image.
- Image de $(3,0)$: on a bien $3^2 = 9 \geqslant 0$ donc $(3,0) \in \mathcal{D}_f$. Ainsi :

$$f(3,0) = \sqrt{9-0} = \sqrt{9} = 3.$$

- Image de $(2t,t^2)$: on a bien $(2t)^2 = 4t^2 \geqslant 2t^2$ donc $(2t,t^2) \in \mathcal{D}_f$. Ainsi :

$$f(2t,t^2) = \sqrt{4t^2 - 2t^2} = \sqrt{2t^2} = \sqrt{2}t.$$

9.3 Dérivées partielles

9.3.1 Dérivées partielles premières

Exemple 9.5 Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = x^2(y-1)$.
On essaie de préciser la variation de f par rapport à x d'une part, par rapport à y d'autre part. Par exemple au point $(3,5)$:

- on fixe $y = 5$ et on considère la fonction dépendant de x uniquement :

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(x,5) = 4x^2.$$

Cette fonction de x est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est $x \in \mathbb{R} \mapsto 8x$. Cette dérivée est appelée *dérivée partielle* de $f(x,y)$ par rapport à x.
Au point $(3,5)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3,5) = 24.$$

- on fixe $x = 3$, et on considère la fonction dépendant de y uniquement :

$$y \in \mathbb{R} \mapsto f(3,y) = 9(y-1).$$

Elle est dérivable, sa dérivée est $y \in \mathbb{R} \mapsto 9$. Cette dérivée est appelée *dérivée partielle* de $f(x,y)$ par rapport à y.
Au point $(3,5)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(3,5) = 9.$$

Définition 9.4 Soit f une fonction de deux variables réelles définie sur un sous-ensemble $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$.

- On appelle **dérivée partielle de f en (x_0, y_0) par rapport à x** la dérivée de l'application $x \longmapsto f(x, y_0)$ en x_0 (quand elle existe).
  On la note alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ou encore $f'_x(x_0, y_0)$.
- On appelle **dérivée partielle de f en (x_0, y_0) par rapport à y** la dérivée de l'application $y \longmapsto f(x_0, y)$ en y_0 (quand elle existe).
  On la note alors $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ou encore $f'_y(x_0, y_0)$.

Remarque : On parle de dérivées partielles première ou d'ordre 1 car on dérive une seule fois par rapport à l'une ou l'autre des variables. On verra dans la partie suivante que l'on peut dériver deux fois, on parlera de dérivées partielles d'ordre 2.

Définition 9.5 Soit f une fonction de deux variables réelles définie sur un sous-ensemble $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}^2$. f est dite dérivable sur $\mathcal{D}_f$ si f est dérivable par rapport à x et à y, en tout point de $\mathcal{D}_f$.

Exemple 9.6 Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^3 y^2$. Considérons le point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Fixons $y = b$, nous avons $h(x) = f(x, b) = x^3 b^2$. Cette fonction est une fonction polynôme et elle est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et on a : $h'(x) = 3x^2 b^2$, donc $h'(a) = 3a^2 b^2$. D'où:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 3a^2 b^2.$$

Fixons $x = a$, nous avons $k(y) = a^3 y^2$. Cette fonction est une fonction polynôme et elle est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et on a: $k'(y) = 2a^3 y$, donc $k'(b) = 2a^3 b$. D'où :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 2a^3 b.$$

Remarque : On a donc, quand ces limites existent :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad \textit{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Exemple 9.7 Prenons l'exemple de la fonction de production. On considère souvent qu'elle dépend de deux facteurs de production le travail L et le capital K.
Formellement, nous avons donc affaire à une fonction de deux variables

$$\mathrm{Y} = f(\mathrm{K}, \mathrm{L}).$$

On définit alors la *productivité marginale du travail* (Pm L) comme étant « le supplément de production qui résulte d'une augmentation ΔL du travail, ramené à une unité. »

$$\mathrm{P}m\ \mathrm{L} \simeq \frac{f(\mathrm{K}, \mathrm{L}+\Delta\mathrm{L}) - f(\mathrm{K}, \mathrm{L})}{\Delta\mathrm{L}}$$

ΔL étant suffisamment petit, on estime que cette définition reste valable pour $\Delta\mathrm{L} \to 0$, on a alors

$$\mathrm{P}m\ \mathrm{L} = \frac{\partial f}{\partial \mathrm{L}}(\mathrm{K}, \mathrm{L})$$

Application Soient des réels α et β, on considère la fonction de production type Cobb-Douglas $f(K,L) = K^\alpha L^\beta$. Calculer la productivité marginale du travail dans ce cas.

D'après ce qui précède :

$$\mathrm{P}m\ \mathrm{L} = \frac{\partial f}{\partial L}(K,L) = K^\alpha \times \beta L^{\beta-1} = \beta K^\alpha L^{\beta-1}.$$

Exercice 9.3 Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$ pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = 2x^3y^2 + 2y + 4x.$$

- Calcul de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$
  On considère l'expression $f(x,y)$ comme étant uniquement une fonction de x et comme si la variable y était une constante, on a :

  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2y^2 + 4$$

  soit $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 6 \times 1^2 \times 2^2 + 4 = 28.$

- Calcul de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
  On considère l'expression $f(x,y)$ comme étant uniquement une fonction de y et comme si la variable x était une constante, on a :
  $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x^3y + 2$$
  soit $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 4 \times 1^3 \times 2 + 2 = 10$.

Exercice 9.4 1. Calculer les dérivées partielles de la fonction f définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$ par :
$$f(x,y) = x + \left(x^3 - y\right)^2$$

- Calcul de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$
  On considère l'expression $f(x,y)$ comme étant uniquement une fonction de x et comme si la variable y était une constante, on a :
  $$f(x,y) = x + x^6 - 2x^3y + y^2$$
  ainsi
  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + 6x^5 - 6x^2y$$
- Calcul de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
  On considère l'expression $f(x,y)$ comme étant uniquement une fonction de y et comme si la variable x était une constante, on a :
  $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x^3 + 2y$$

2. Calculer les dérivées partielles de la fonction f définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathcal{P}\}$ où $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $y = -\frac{x^2}{2}$ par :
$$f(x,y) = \frac{y}{x^2 + 2y}$$

- Calcul de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$
  On considère l'expression $f(x,y)$ comme étant uniquement une fonction de x et comme si la variable y était une constante. La fonction f est de la forme $y \times \frac{1}{v}$ avec y une constante et $v(x) = x^2 + 2y$. On a alors $v'(x) = 2x$ et :
  $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \times \frac{-v'}{v^2} = y \times \frac{-2x}{(x^2+2y)^2} = -\frac{2xy}{(x^2+2y)^2}$$

- Calcul de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

  On considère l'expression $f(x,y)$ comme étant uniquement une fonction de y et comme si la variable x était une constante. $f(x,y)$ est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(y)=y$ et $v(y)=x^2+2y$ donc $u'(y)=1$ et $v'(y)=2$. Ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{1\times(x^2+2y)-y\times 2}{(x^2+2y)^2}=\frac{x^2}{(x^2+2y)^2}$$

9.3.2 Dérivées partielles d'ordre 2

Soit f une fonction définie, dérivable sur un sous-ensemble $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}^2$.

Définition 9.6 Dans la mesure où les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont elles mêmes des fonctions de deux variables définies sur $\mathcal{D}_f$, si elles sont dérivables, nous pouvons les dériver de nouveau pour obtenir des **dérivées partielles secondes.**

Notations :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Vous rencontrerez aussi la notation suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f''_{xy} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{yx} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{y^2}$$

Attention ! Dans les notations, il faut respecter l'ordre de dérivation. f''_{yx} indique que l'on dérive par rapport à y puis x, ce qui correspond à $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

Définition 9.7 Si les deux dérivées partielles premières de f sont dérivables par rapport aux deux variables, en tout point de $\mathcal{D}$, on dit que la fonction f est **deux fois dérivable sur $\mathcal{D}$.**

Exemple 9.8 Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = xy^2 + 3x^3y$.

La fonction f est dérivable par rapport à x sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une somme de fonctions dérivables. On a en particulier pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 + 9x^2y.$$

Cette fonction dérivée partielle est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 18xy,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y + 9x^2.$$

La fonction f est dérivable par rapport à y sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une somme de fonctions dérivables. On a en particulier pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + 3x^3.$$

Cette fonction dérivée partielle est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y + 9x^2.$$

Remarque : Dans l'exemple précédent, on remarque que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Ce résultat sera vrai pour toutes les fonctions que vous rencontrerez en économie cette année, il porte le nom de Théorème de Schwarz.

Théorème 9.1 **(Théorème de Schwarz)** Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in \mathcal{D}_f$. Si f admet en (x, y) des dérivées partielles secondes continues, alors on a l'égalité :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

Remarque : Ce théorème est utile dans la pratique car il diminue le nombre de calculs à effectuer. (3 dérivées partielles secondes au lieu de 4).

Exemple 9.9 Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + 2xy^3 - 4y^2$.

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^2$ (fonction polynomiale).
On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2y^3$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy^2 - 8y$$

Ces fonctions dérivées partielles sont elles-mêmes dérivables sur $\mathbb{R}^2$ et les dérivées partielles seront des fonctions polynomiales donc continues sur $\mathbb{R}^2$, on peut appliquer le théorème précédent:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6y^2$$

Par ailleurs,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x$$

et

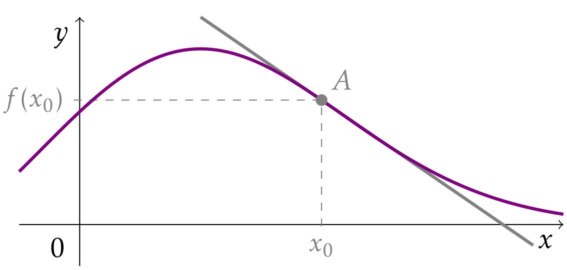
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12xy - 8.$$

9.4 Fonction différentiable, différentielle

9.4.1 Fonction différentiable : introduction

Cas des fonctions d'une variable

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en x_0, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_0. Au voisinage de x_0, la tangente en A ressemble beaucoup à la courbe $\mathcal{C}_f$.
On dit que la tangente est une **approximation affine** de la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage du point d'abscisse x_0.



Théorème 9.2 Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$. On suppose que f est dérivable en x_0. Alors pour h proche de 0, on a

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0).$$

Exemple 9.10 Calculer une valeur approchée de $\sqrt{1.02}$.

Soit $f(x) = \sqrt{x}$ et $x_0 = 1$. Alors f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2}$. Donc

$$\sqrt{1.02} = f(1.02) \approx 1 + \frac{1}{2}(1.02 - 1) = 1.01.$$

Avec une calculatrice, j'obtiens $\sqrt{1.02} = 1.00995$.

Extension aux fonctions de deux variables

On a une définition analogue mais la fonction qui joue le même rôle que la fonction affine est une fonction de deux variables.

Exemple 9.11 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^2$. On s'intéresse à l'expression de f au voisinage du point $(1,3)$.

Soit $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ avec h et k proches de 0, on a :

$$f(1+h, 3+k) = 10 + 2h + 6k + h^2 + k^2$$

ce qu'on peut écrire :

$$f(1+h, 3+k) = f(1,3) + 2h + 6k + r(h,k)$$

avec $r(h,k) = h^2 + k^2$ petit quand h et k sont proches de 0. Ce qui revient à :

$$f(1+h, 3+k) \approx f(1,3) + 2h + 6k.$$

Or calculons $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,3)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,3)$. On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = 2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = 6.$$

On peut donc écrire :

$$f(1+h, 3+k) \approx f(1,3) + h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}.$$

9.4.2 Fonction différentiable : définitions, notations

Définition 9.8 Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$, un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.
Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$, on dit que la fonction f est **différentiable en** (x_0, y_0), si pour tout (h, k) tels que $(x_0 + h, y_0 + k) \in \mathcal{D}_f$,

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + r(h, k).$$

- La terme $f(x_0, y_0)$ est une constante
- Le terme $h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est un terme linéaire.
- Le reste $r(h, k)$ est infiniment petit devant $|h| + |k|$.

<u>Remarque</u> : La fonction de l'exemple précédent est donc différentiable en $(1, 3)$. Mais pour le prouver, il a fallu conduire un calcul sur le reste $r(h, k)$. Ce qui sera inutile dans les exercices que vous rencontrerez cette année, grâce à la propriété suivante :

Propriété 9.1 Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$, un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ admettant en (x_0, y_0) des dérivées partielles continues alors f est différentiable en (x_0, y_0).

Exemple 9.12
- La fonction f de l'exemple précédent : $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est différentiable, non seulement en $(1, 3)$, mais aussi en tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$ car :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$.

- La fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$: $g(x, y) \mapsto xy^2$ est différentiable sur tout $\mathbb{R}^2$ car

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = y^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2xy$$

sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$.

Le terme linéaire de la Définition 9.8 s'appelle **la différentielle de f.**

Définition 9.9 Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fixé, si f est différentiable en (x_0, y_0) alors la fonction de deux variables :

$$(h, k) \mapsto h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

est appelée la différentielle en (x_0, y_0) de la fonction f.
On la note $df_{(x_0, y_0)}$ ou abusivement df.

Exemple 9.13

- La fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est différentiable en tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$ et sa différentielle en (x, y) est la fonction :

$$df_{(x,y)} : (h, k) \mapsto 2xh + 2yk.$$

Par exemple en $(1, 3)$ la différentielle est

$$df_{(1,3)} : (h, k) \mapsto 2h + 6k.$$

- La fonction $g : (x, y) \mapsto xy^2$ est différentiable sur tout $\mathbb{R}^2$ et sa différentielle en (x, y) est la fonction :

$$df_{(x,y)} : (h, k) \mapsto y^2 h + 2xyk$$

en $(2, 3)$ la différentielle de g est

$$df_{(2,3)} : (h, k) \mapsto 9h + 12k.$$

Notations : La fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(h, k) \mapsto h$ est parfois notée dx.
La fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(h, k) \mapsto k$ est parfois notée dy.
Avec ces notations, la différentielle s'écrit abusivement :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

9.4.3 Fonction deux fois différentiable

La différentielle première indique une approximation d'une fonction par un polynôme de deux variables de degré 1.
La différentielle seconde consiste à faire une approximation plus fine, à l'aide d'un polynôme de deux variables de degré 2.
On dira que f est deux fois différentiable en $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ si, quels que soient h et k proches de 0:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = P(h, k) + r(h, k)$$

où $r(h, k)$ est infiniment petit devant $|h|^2 + |k|^2$ et où $P(h, k)$ est un polynôme de degré 2 en h et k i.e.

$$P(h, k) = a + bh + ck + dh^2 + ek^2 + fhk.$$

On va voir dans ce qui suit que les coefficients a, b, c, d, e, f de P sont liés aux dérivées partielles de f.

Définition 9.10 Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$, un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.
Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$, on dit qu'une fonction f est **deux fois différentiable** en $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ si , pour tout (h, k) tel que $(x_0 + h, y_0 + k) \in \mathcal{D}_f$,

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x_0,y_0) + hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x_0,y_0) + r(h,k) \end{aligned}$$

- Le terme $P(h,k) = f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x_0,y_0) + hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x_0,y_0)$ est un polynôme de deux variables h et k de degré 2.
- Le terme $r(h,k)$ est le reste, infiniment petit devant $|h|^2 + |k|^2$.

Remarque : Comme dans le cas des fonctions une fois différentiable, on a un résultat qui nous permettra de montrer que des fonctions sont deux fois différentiable sans devoir calculer le reste $r(h,k)$.

Propriété 9.2 Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$, un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ admettant en (x_0, y_0) des dérivées partielles **premières et secondes** continues alors f est deux fois différentiable en (x_0, y_0).

Exemple 9.14 La fonction $g : (x,y) \mapsto xy^2$ est deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^2$ car elle admet sur tout $\mathbb{R}^2$ des dérivées premières et secondes continues (car ce sont des polynômes) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y$$