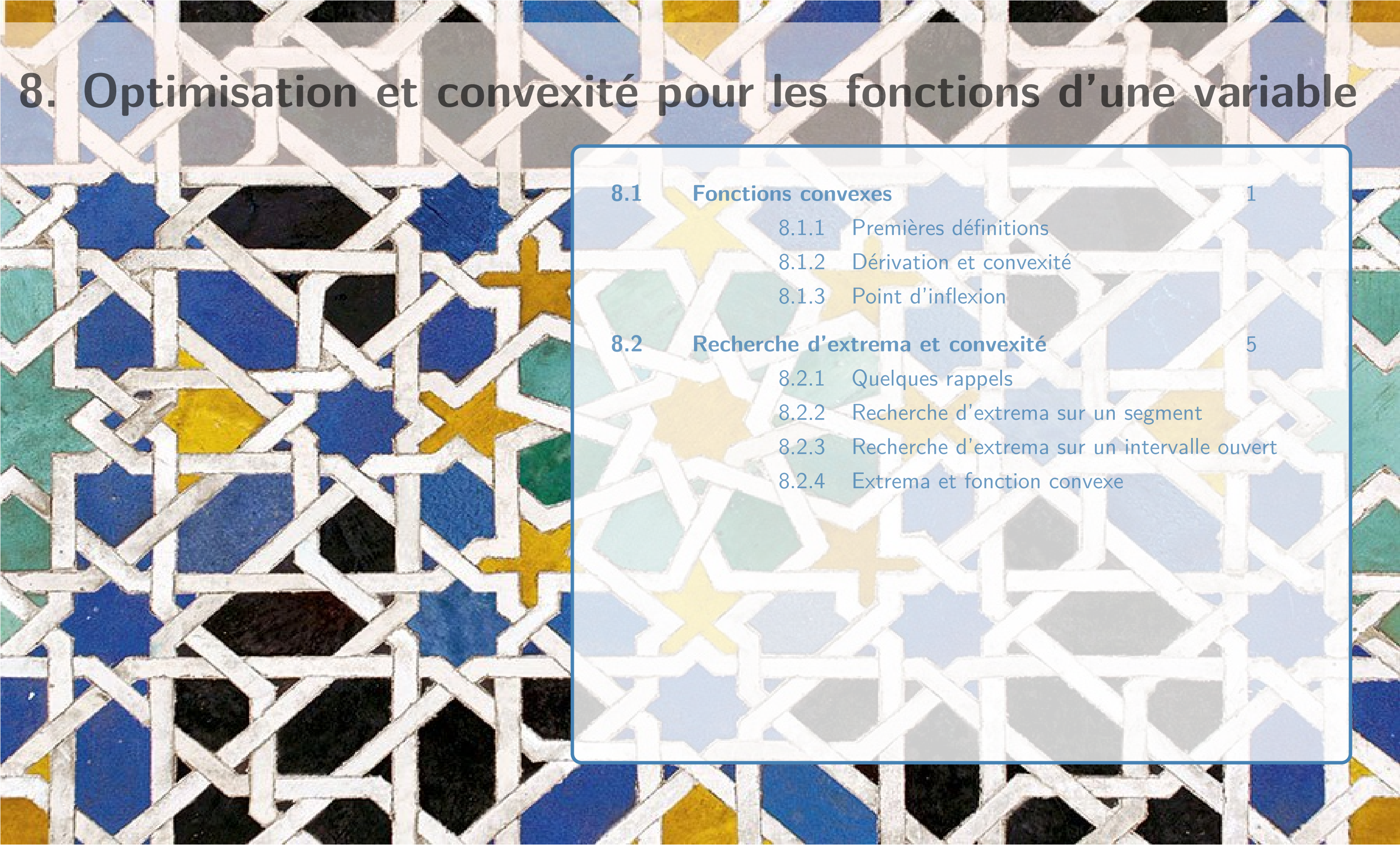


8. Optimisation et convexité pour les fonctions d'une variable

Les mathématiques ne sont pas une moindre immensité que la mer.

Victor Hugo

Ce chapitre fait suite au chapitre sur les dérivées de fonctions et le complète. En effet, la convexité d'une fonction se caractérise notamment avec le signe de sa dérivée seconde et fournit des outils dans la recherche des extrema d'une fonction.

8.1 Fonctions convexes

8.1.1 Premières définitions

Dérivée seconde

Définition 8.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est **deux fois dérivable** si f et f' sont dérivables. Dans ce cas, on note f'' la dérivée de f'.

Exemple 8.1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$.
La fonction f est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$.
La fonction f' est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 6x - 6$.

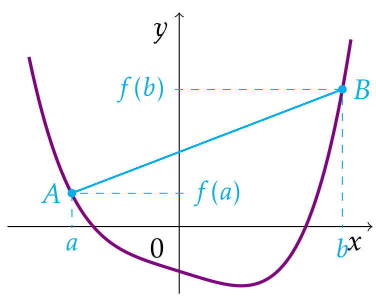
Exercice 8.1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\frac{1}{1-x}$.
Dériver deux fois la fonction f.

Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $\quad f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\quad$ et $\quad f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}$.

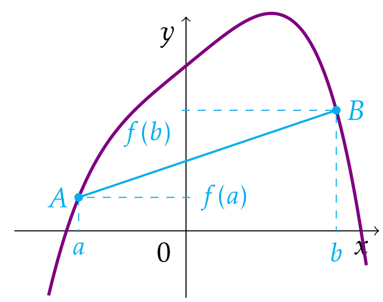
Définition graphique

Définition 8.2 Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est dite **convexe** sur I si sa courbe est située **en dessous de chacune de ses cordes**.
- La fonction f est dite **concave** sur I si sa courbe est située **au-dessus de chacune de ses cordes**.



f est une fonction convexe

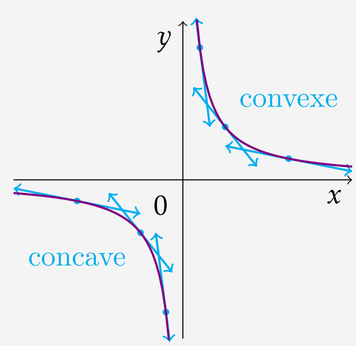


f est une fonction concave

Théorème 8.1 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors

- f est **convexe** sur I si et seulement si sa courbe est située entièrement **au-dessus de chacune de ses tangentes**.
- f est **concave** sur I si et seulement si sa courbe est située entièrement **en dessous de chacune de ses tangentes**.

Exemple 8.2 La fonction inverse $x\longmapsto\frac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty,0[$ et convexe sur $]0,+\infty[$.



8.1.2 Dérivation et convexité

Théorème 8.2 Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. Alors

- f est **convexe** sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $\quad f''(x) \geqslant 0$.
- f est **concave** sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $\quad f''(x) \leqslant 0$.

Exemple 8.3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$.
Étudier la convexité de f.

La dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3.$$

La dérivée seconde de f est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x-3).$$

La convexité de f se déduit du signe de sa dérivée seconde f''.
Comme $20x^2 \geqslant 0$ alors le signe de $f''(x)$ est celui $x - 3$. J'obtiens alors le tableau suivant :

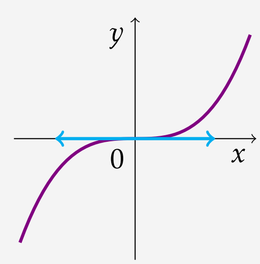
x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
f		concave		concave		convexe	

En conclusion, f est concave sur $]-\infty, 3]$ et convexe sur $[3, +\infty[$.

8.1.3 Point d'inflexion

Définition 8.3 Soient f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
Un **point d'inflexion** de la courbe $\mathcal{C}_f$ est un point où la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente.
C'est aussi le point où la convexité change de sens.

Exemple 8.4 La courbe représentative de la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ admet comme point d'inflexion l'origine du repère, de coordonnées $(0, 0)$.
La courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente donc $(0, 0)$ est un point d'inflexion.



Théorème 8.3 Soient f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$ si et seulement si f'' s'annule **et** change de signe en x_0.

Exemple 8.5 En utilisant l'étude de la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$ menée dans l'exemple 8.3, déterminer les points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Grâce au tableau déjà obtenu, je sais que la dérivée seconde s'annule lorsque $x = 0$ et $x = 3$.

- En $x = 0$, f'' s'annule mais ne change pas de signe donc le point d'abscisse 0 n'est pas un point d'inflexion : la tangente ne traverse pas la courbe en ce point.
- En $x = 3$, f'' s'annule **et** change de signe donc le point d'abscisse 3 est un point d'inflexion : la tangente traverse la courbe en ce point.

Puis comme
$$f(3) = 3^5 - 5 \times 3^4 = (3-5) \times 3^4 = -2 \times 81 = -162,$$
alors le point de coordonnées $(3, -162)$ est l'unique point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Méthode 8.1 (Étudier la convexité d'une fonction deux fois dérivable) Pour étudier la convexité d'une fonction deux fois dérivable :

1. On calcule la dérivée seconde f'' de f en dérivant de nouveau f'.
2. On établit le tableau de signe de $f''(x)$.
3. On conclut grâce au théorème :
   - Lorsque $f''(x) \geqslant 0$, f est convexe.
   - Lorsque $f''(x) \leqslant 0$, f est concave.

Exemple 8.6 Étudier la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = x^4 - 10x^3 - 84x^2 - 60x + 6.$$

Je commence par dériver f, puis la dérivée f', pour obtenir f''. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 4x^3 - 30x^2 - 168x - 60 \quad \text{et} \quad f''(x) = 12x^2 - 60x - 168 = 12(x^2 - 5x - 14).$$

J'étudie maintenant le signe de $f''(x)$:
Puisque $12 > 0$, le signe de $f''(x)$ ne dépend que du signe de $x^2 - 5x - 14$.
Je calcule le discriminant : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-14) = 25 + 56 = 81 = 9^2 > 0$.
Il y a donc deux racines
$$x_1 = \frac{5-9}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+9}{2} = 7.$$

J'en déduis alors le tableau de signe de $f''(x)$ ainsi que la convexité de f :

x	$-\infty$		-2		7		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		convexe		concave		convexe	

Remarque : L'étude de la convexité permet de préciser l'allure de la courbe de la fonction f.

8.2 Recherche d'extrema et convexité

8.2.1 Quelques rappels

Définition 8.4 (Extremum local) Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

- On dit que f admet un maximum local en x_0 lorsqu'il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 inclus dans I tel que : pour tout $x \in V_{x_0}$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.
- On dit que f admet un minimum local en x_0 lorsqu'il existe un voisinage V_{x_0} de x_0, V_{x_0} inclus dans I, tel que : pour tout $x \in V_{x_0}$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Remarque : Pour un point $x_0 \in \mathbb{R}$, on pourra considérer qu'un voisinage de x_0 noté V_{x_0} est un "petit" intervalle ouvert centré en x_0.

Définition 8.5 (Extremum global) Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

- On dit que f admet un maximum global en x_0 lorsque pour tout $x \in I$,
$$f(x) \leqslant f(x_0).$$
- On dit que f admet un minimum global en x_0 lorsque pour tout $x \in I$,
$$f(x) \geqslant f(x_0).$$

Illustration

8.2.2 Recherche d'extrema sur un segment

Théorème 8.4 **(Théorème des bornes)** Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Toute fonction continue sur le segment $I = [a, b]$ est bornée et atteint ses bornes.

Remarque :

- *Cela signifie que toute fonction continue sur le segment $I = [a, b]$ admet des extrema globaux sur ce segment.*
- *Ce théorème donne l'existence d'extrema, mais ne donne pas de méthode pour les déterminer.*

8.2.3 Recherche d'extrema sur un intervalle ouvert

Définition 8.6 **(Point critique)** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert J. On dit que $x_0 \in J$ est un point critique de f lorsque $f'(x_0) = 0$.

Théorème 8.5 **(Caractérisation d'un extremum)** Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et soit $J =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction dérivable sur J. Si f admet un extremum local en $x_0 \in J$ alors x_0 est un point critique de f, i.e. $f'(x_0) = 0$.

Attention ! Ce résultat est faux si on ne suppose pas que l'intervalle est ouvert.
Par exemple, considérons la fonction $f : x \longmapsto x^2$ définie sur $[0, 1]$. Elle admet un maximum en 1, est dérivable sur $[0, 1]$ mais $f'(1) = 2 \neq 0$.

Attention ! Il est possible d'avoir $f'(x_0) = 0$ sans que f n'admette d'extremum en x_0.
Par exemple, considérons la fonction $f : x \longmapsto x^3$ définie sur $[-1, 1]$. Elle est dérivable sur $[-1, 1]$, de plus $f'(0) = 0$, mais 0 n'est ni un maximum local, ni un minimum local.

<u>*Remarque*</u> :

- *On a donc montré que les extrema locaux d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert sont à chercher parmi ses points critiques.*
- *Les extrema locaux d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, sur un intervalle quelconque, sont donc à chercher parmi:*
  - *ses points critiques,*
  - *les bornes de l'intervalle.*

Théorème 8.6 Soit f une fonction de classe deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$ un point critique de f. Alors,

- Si $f^{(2)}(x_0) > 0$, alors f possède un minimum local en x_0.
- Si $f^{(2)}(x_0) < 0$, alors f possède un maximum local en x_0.
- Si $f^{(2)}(x_0) = 0$, on ne peut rien conclure.

Exercice 8.2 Trouver les extrema de la fonction $f : x \longmapsto x^3 - x^2 - x + 1$ définie sur $\left[-2, \frac{3}{2}\right]$. Déterminer leur nature, et s'ils sont locaux ou globaux.

La fonction est continue sur un segment car c'est un polynôme donc d'après le théorème des bornes, elle admet au moins un minimum global et un maximum global (il va falloir les déterminer).
La fonction f est deux fois dérivable sur son intervalle de définition, donc les extrema sont soit des points critiques, soit des bornes de l'intervalle.
On commence par chercher les points critiques : $\forall x \in \left[-2, \frac{3}{2}\right]$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

Donc

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0.$$

On cherche les racines de ce polynôme: $\Delta = 4 + 4 \times 3 = 16 = 4^2$, donc on a deux racines réelles, qui sont 1 et $-\frac{1}{3}$.
Il y a donc au total quatre points à étudier : $1, -\frac{1}{3}, -2$ et $\frac{3}{2}$.
On commence par calculer leurs images:

$$f(1) = 0, \quad f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{27} \simeq 1,19, \quad f(-2) = -9, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{8} \simeq 0,63$$

Le minimum global est donc atteint en -2, et le maximum global en $-\frac{1}{3}$.
Il ne reste plus qu'à étudier les deux points restants : 1 et $\frac{3}{2}$: Comme 1 n'est pas une borne de l'intervalle, on peut calculer :

$$f''(1) = 4 > 0$$

Donc 1 correspond à un minimum local.

Reste à étudier $\frac{3}{2}$, la méthode précédente ne fonctionne pas car $\frac{3}{2}$ est une borne de l'intervalle.
Dressons alors le tableau de variations de f, on a:

x	-2		$-\frac{1}{3}$		1		$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-9	↗	1.19	↘	0	↗	0.63

Cela nous permet donc de conclure que $\frac{3}{2}$ correspond à un maximum local.

8.2.4 Extrema et fonction convexe

Théorème 8.7 Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert I.
Si x_0 est un point critique de f alors f admet un minimum global en x_0.

Exemple 8.7 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 7.$$

Etudions les extrema de f sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est un polynôme donc elle est deux fois dérivable. Commençons par déterminer si elle admet des points critiques, pour cela calculons sa dérivée :

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 + x = x\left(\frac{1}{3}x^2 + 1\right).$$

On a alors que :

$$f'(x) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{3}x^2 + 1 = 0.$$

Calculons le discriminant du polynôme $\frac{1}{3}x^2 + 1$, on obtient $\Delta = 0 - 4 \times \frac{1}{3} \times 1 = -\frac{4}{3} < 0$.
Ainsi l'équation $\frac{1}{3}x^2 + 1 = 0$ n'admet aucune solution.
Le seul point critique de f est 0.
Etudions la convexité de f. Pour cela, calculons sa dérivée seconde :

$$f''(x) = x^2 + 1 > 0.$$

Ainsi la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$, le point critique 0 est donc un minimum global de f.