

11. Intégration sur un segment

11.1	Intégrale et aire	1
11.1.1	Unité d'aire	
11.1.2	Intégrale d'une fonction continue et positive	
11.1.3	Intégrale d'une fonction continue et négative	
11.1.4	Lien entre intégrale et dérivée	
11.2	Primitives d'une fonction continue sur un intervalle	5
11.2.1	Primitives des fonctions composées usuelles	
11.3	Intégration sur un segment	10
11.3.1	Définition	
11.3.2	Premières propriétés	
11.4	Calculs d'intégrales	12
11.4.1	Primitives usuelles	
11.4.2	Intégration par parties	
11.4.3	Changement de variables	

Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une préparation à la philosophie.

Isocrate

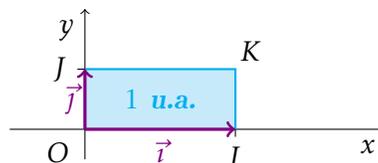
Dans ce chapitre, nous introduisons l'intégrale d'une fonction continue sur un segment comme l'aire sous la courbe de cette fonction. Pour pouvoir calculer cette aire, nous avons besoin des primitives.

Pour finir, nous verrons plus particulièrement différentes techniques de calculs d'intégrales ainsi que les propriétés qui découlent des intégrales.

11.1 Intégrale et aire

11.1.1 Unité d'aire

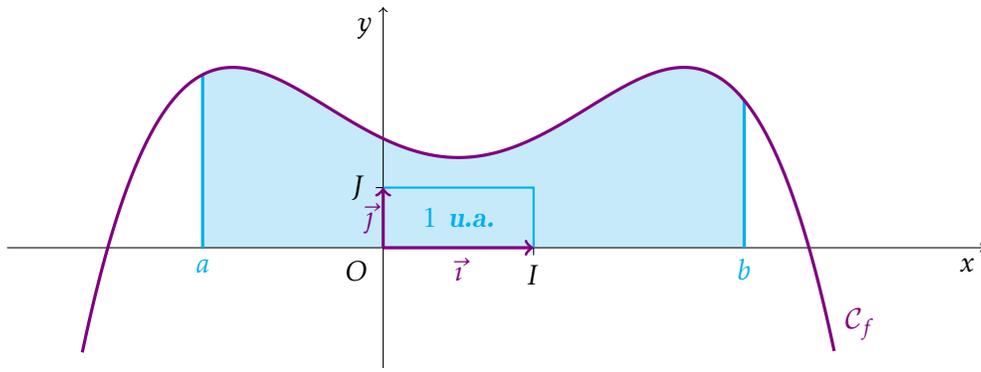
Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthogonal du plan.
L'unité d'aire, notée *u.a.*, est l'aire du rectangle unitaire $OIKJ$ avec $I(1,0)$, $J(0,1)$ et $K(1,1)$.



11.1.2 Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition 11.1 Soit f une fonction définie, **continue** et **positive** sur un intervalle $[a, b]$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) . L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine \mathcal{D}_f compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

Ce nombre est noté $\int_a^b f(x)dx$.

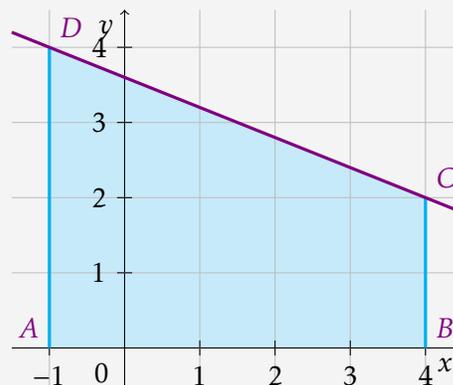


Remarque :

- $\int_a^b f(x)dx$ se lit "intégrale de a à b de $f(x)dx$ ".
- Les réels a et b sont appelés les **bornes** de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.
- La variable x est dite "muette". Elle n'intervient pas dans le résultat, c'est-à-dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du.$$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$ car le domaine \mathcal{D}_f est alors réduit à un segment.

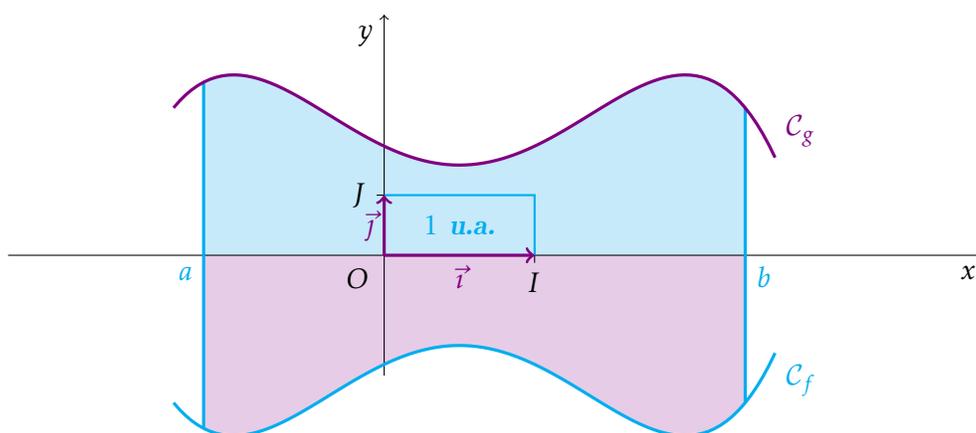
Exemple 11.1 Calculer $\int_{-1}^4 \frac{2x+18}{5} dx$.



11.1.3 Intégrale d'une fonction continue et négative

Si f est une fonction continue et **négative** sur un intervalle $[a, b]$, alors la fonction g définie sur l'intervalle $[a, b]$ par $g(x) = -f(x)$ est une fonction continue et **positive** sur cet intervalle.

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine \mathcal{D}_f compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du domaine \mathcal{D}_g compris entre la courbe \mathcal{C}_g , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Définition 11.2 Soit f une fonction définie, continue et négative sur un intervalle $[a, b]$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire \mathcal{A} , exprimée en unités d'aire, du domaine \mathcal{C}_f compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$:

$$\int_a^b f(x) dx = -\mathcal{A}.$$

11.1.4 Lien entre intégrale et dérivée

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On peut définir une nouvelle fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a, b]$, associe l'intégrale de la fonction f entre a et x :

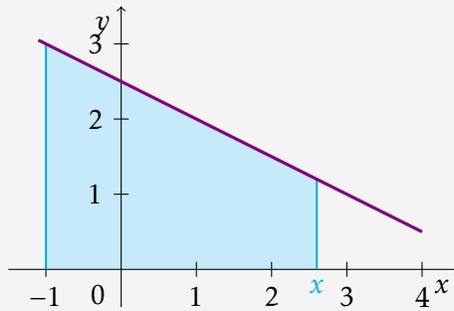
$$F(x) = \int_a^x f(t).$$

Théorème 11.1 Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.

La fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)$ est dérivable sur $[a, b]$ et sa dérivée est f . Autrement dit :

$$\forall x \in [a, b], \quad F'(x) = f(x).$$

Exemple 11.2 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1, 4]$ par $f(x) = \frac{5-x}{2}$. Calculons l'aire de la surface bleue.



11.2 Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

En économie, il arrive en pratique que l'on connaisse la vitesse de variation d'une grandeur comme par exemple le coût marginal (qui est la dérivée du coût total) et que l'on veuille en déduire la valeur de la grandeur (ici la valeur du coût total).

Autrement dit, connaissant la dérivée d'une fonction, comme trouver la fonction d'origine?

Définition 11.3 Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que F est une **primitive de la fonction f sur I** si F est dérivable et si :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Exemple 11.3 • $F : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$ est une primitive sur \mathbb{R} de

- $G : x \mapsto e^x - 2$ est une primitive sur \mathbb{R} de
- Les fonctions $F : x \mapsto x^2$, $G : x \mapsto x^2 + 1$, mais aussi $H = x \mapsto x^2 + K$, $K \in \mathbb{R}$ sont des primitives sur \mathbb{R} de
- $H : x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive sur $]0; +\infty[$ de

Remarque :

- Comme F est dérivable sur I , la fonction F est en particulier continue sur I .
- Il n'y a pas unicité de la primitive d'une fonction donnée f . C'est pourquoi on parle **d'une primitive** de la fonction f et non de **la primitive** de la fonction f .



Théorème 11.2 • Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I .

- Si F est une primitive de f sur I , alors toute autre primitive de f sur I est la forme

$$F + c \quad \text{où } c \text{ est une constante.}$$

- Il existe **une et une seule** primitive de f sur I qui prend une valeur donnée en un point donné :
Si $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$.

Exemple 11.4 Montrer que la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = x^2 - 1$ est la primitive de la fonction $f : x \mapsto 2x$ qui vérifie $F(1) = 0$.

Primitives usuelles

Étant donné la définition d'une primitive, certains résultats connus pour les fonctions dérivées se prolongent aux fonctions primitives.

- Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
- Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I .

Les formules suivantes sont valables sur tout intervalle où la fonction est continue. Par ailleurs, C désigne une constante réelle.

f est définie sur I par	une primitive F est donnée par
$f(x) = a \quad (a \in \mathbb{R})$	$F(x) = ax + C$
$f(x) = x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + C$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$

Exemple 11.5 Calculer les primitives des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 3x^2$

2. $f(x) = x + \frac{3}{2}$

3. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

4. $f(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{x^2}$

5. $f(x) = x + 2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

6. $f(x) = \frac{6x^2 - 8x + 2}{5}$

7. $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$

11.2.1 Primitives des fonctions composées usuelles

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

fonction f	une primitive F est donnée par
$f = u' \times u^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$F = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$f = \frac{u'}{u^2}$	$F = -\frac{1}{u} + C$
$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln u + C$
$f = u'e^u$	$F = e^u + C$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u} + C$

Méthode 11.1 (Calculer une primitive d'une fonction composée)

1. On repère la forme de la fonction ($u' \times u^n$ ou $\frac{u'}{u^n}$, etc.).
2. On **identifie** la fonction u et on **calcule** sa dérivée u' .
3. On compare la forme repérée avec la fonction de départ. Deux possibilités :
 - la forme repérée correspond exactement à la fonction de départ, auquel cas une primitive est directement donnée par la formule du tableau,
 - la forme repérée est de la forme $k \times f(x)$, auquel cas une primitive est donnée par la formule du tableau **multipliée par** $\frac{1}{k}$.

Exemple 11.6 Calculer une primitive pour chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = (2x + 1)^2$

2. $f(x) = xe^{x^2}$.

3. $f(x) = \frac{1}{(1-3x)^2}$

4. $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$.

5. $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 1}$.

6. $f(x) = (2x - 1)(x^2 - x + 1)^3$

Méthode 11.2 (Déterminer la primitive vérifiant une condition donnée) Pour déterminer la primitive F d'une fonction f vérifiant une condition donnée :

1. On commence par déterminer la forme générale de toutes les primitives de la fonction f : elles sont toutes de la forme $F + C$.
2. On utilise ensuite la condition que doit vérifier la primitive demandée pour déterminer la valeur de la constante C .

Exemple 11.7 Calculer la primitive F de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ qui vérifie la condition $F(1) = 1$.

11.3 Intégration sur un segment

11.3.1 Définition

Définition 11.4 Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I . Soit F une primitive de f sur I . On appelle **intégrale de f entre a et b** le nombre réel $F(b) - F(a)$, noté $\int_a^b f(t)dt$:

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$



Remarque : Puisqu'il s'agit de la différence entre deux termes, le résultat ne dépend pas de la primitive F choisie.

Exemple 11.8 Calculer chacune des intégrales.

1. $\int_1^3 3t^2 + 2t - 1 dt$

2. $\int_1^e \frac{1}{t} dt$

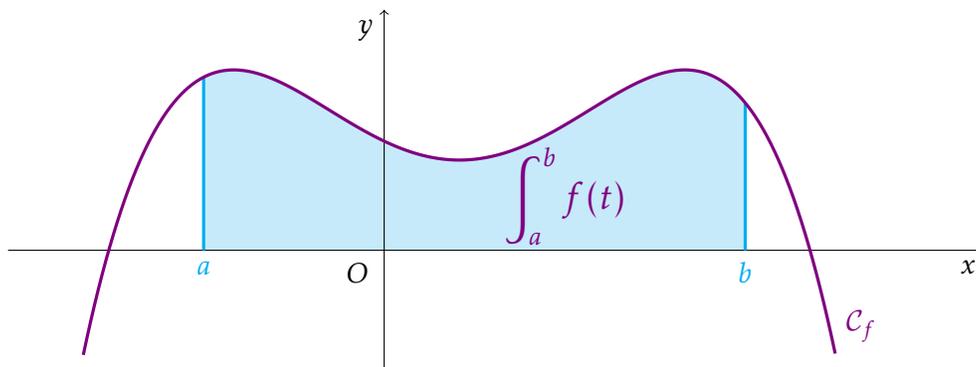
3. $\int_{-1}^1 (e^x - e^{-x}) dx$

Proposition 11.1 Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b dans I . On a alors :

$$\int_a^a f(t)dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)dt = - \int_b^a f(t)dt.$$

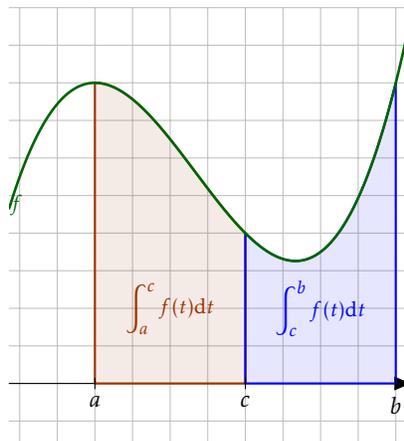
11.3.2 Premières propriétés

Proposition 11.2 Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Soit \mathcal{C}_f la courbe représentative de f . Alors $\int_a^b f(t) dt$ est l'aire de la surface comprise entre \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.



Proposition 11.3 (Relation de Chasles) Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a, b et c dans I . Alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$



Méthode 11.3 (Calculer l'intégrale d'une fonction f définie « par morceaux ») Pour calculer l'intégrale d'une fonction f dont l'expression est définie en plusieurs morceaux, on utilise la relation de Chasles. On décompose ainsi l'intégrale de f sur chaque intervalle sur lequel on connaît l'expression de f .

Exemple 11.9 Soit f la fonction définie sur $[-2, 3]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -2 \leq x \leq 1, \\ -\frac{1}{x^2} & \text{si } 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

Calculer $\int_{-2}^3 f(x) dx$.

11.4 Calculs d'intégrales

11.4.1 Primitives usuelles

On trouve directement une primitive de la fonction à intégrer grâce au tableau des primitives usuelles :

Exemple 11.10 $I = \int_1^2 \frac{2t+1}{(t^2+t+1)^2} dt$

11.4.2 Intégration par parties

Proposition 11.4 Soient u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I et soient a et b dans I . Alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

Exemple 11.11 Calcul de $I_1 = \int_0^1 te^t dt$.

Exemple 11.12 $I_2 = \int_1^2 x \ln(x) dx$

Exemple 11.13 Calcul de $I_3 = \int_1^3 \ln(x)dx$.

11.4.3 Changement de variables

Proposition 11.5 Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et soit u une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[\alpha; \beta]$ telle que $u([\alpha; \beta]) \subseteq [a; b]$. Alors :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(t)dt.$$

Méthode 11.4 En pratique :

1. on pose le changement de variable $t = u(x)$.
2. on calcule l'élément différentiel : $dt = u'(x)dx$
3. on détermine la nouvelle fonction à intégrer : $f(u(x)) = f(t)$
4. on détermine les nouvelles bornes de l'intégrale :
 - si $x = \alpha$ alors $t = u(\alpha)$
 - si $x = \beta$ alors $t = u(\beta)$

Exemple 11.14 Calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$ à l'aide du changement de variable $t = 2x + 1$.

