11. Intégration sur un segment

Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une préparation à la philosophie.

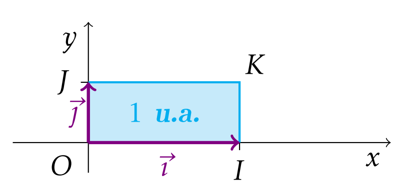
Isocrate

Dans ce chapitre, nous introduisons l'intégrale d'une fonction continue sur un segment comme l'aire sous la courbe de cette fonction. Pour pouvoir calculer cette aire, nous avons besoin des primitives.
Pour finir, nous verrons plus particulièrement différentes techniques de calculs d'intégrales ainsi que les propriétés qui découlent des intégrales.

11.1 Intégrale et aire

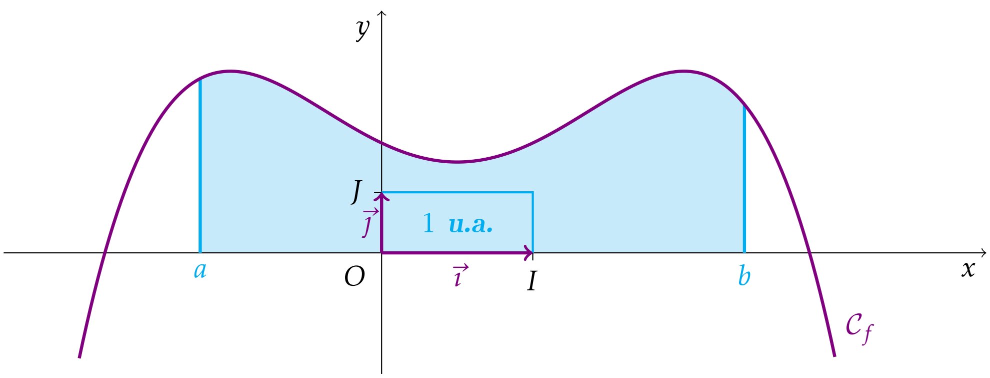
11.1.1 Unité d'aire

Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthogonal du plan. L'unité d'aire, notée *u.a.*, est l'aire du rectangle unitaire $OIKJ$ avec $I(1,0)$, $J(0,1)$ et $K(1,1)$.



11.1.2 Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition 11.1 Soit f une fonction définie, **continue** et **positive** sur un intervalle $[a, b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.
Ce nombre est noté $\displaystyle\int_a^b f(x)x$.



Remarque :

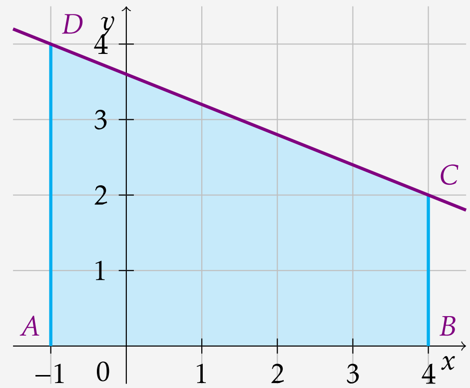
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *se lit "intégrale de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$".*

- *Les réels a et b sont appelés les* **bornes** *de l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

- *La variable x est dite "muette". Elle n'intervient pas dans le résultat, c'est-à-dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b :* $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$.

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$ *car le domaine $\mathcal{D}_f$ est alors réduit à un segment.*

Exemple 11.1 Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{2x+18}{5} \mathrm{d}x$.



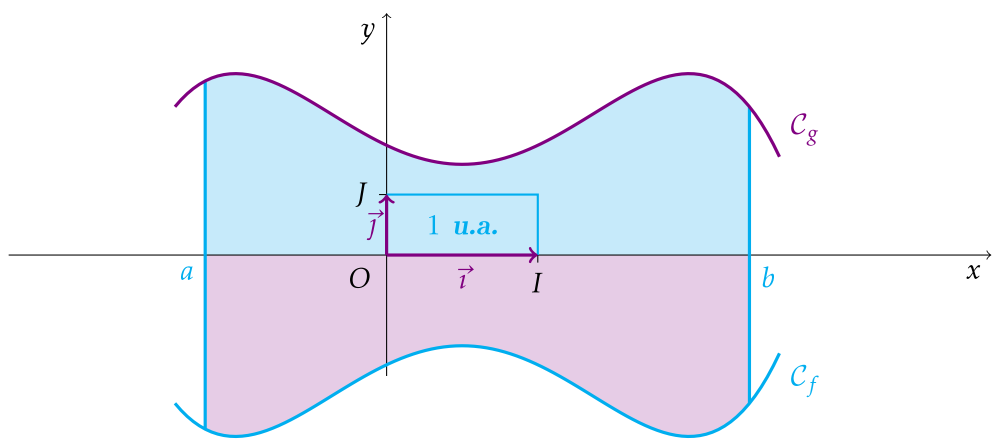
La fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{2x+18}{5}$ est continue et positive sur l'intervalle $[-1; 4]$. L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{2x+18}{5} \mathrm{d}x$ est égale à l'aire du trapèze $ABCD$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{4} \frac{2x+18}{5} \mathrm{d}x &= \frac{\left(AD+BC\right)\times AB}{2}\\ &= \frac{\left(4+2\right)\times 5}{2} = 15.\end{aligned}$$

11.1.3 Intégrale d'une fonction continue et négative

Si f est une fonction continue et **négative** sur un intervalle $[a, b]$, alors la fonction g définie sur l'intervalle $[a, b]$ par $g(x) = -f(x)$ est une fonction continue et **positive** sur cet intervalle.

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du domaine $\mathcal{D}_g$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Définition 11.2 Soit f une fonction définie, continue et négative sur un intervalle $[a, b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathcal{C}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$:

$$\int_a^b f(x)x = -\mathcal{A}.$$

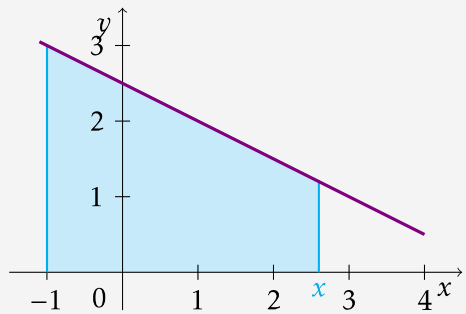
11.1.4 Lien entre intégrale et dérivée

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. On peut définir une nouvelle fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a,b]$, associe l'intégrale de la fonction f entre a et x : $F(x) = \int_a^x f(t)$.

Théorème 11.1 Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.
La fonction F définie sur $[a,b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)$ est dérivable sur $[a,b]$ et sa dérivée est f. Autrement dit :

$$\forall x \in [a,b], \quad F'(x) = f(x).$$

Exemple 11.2 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1,4]$ par $f(x) = \frac{5-x}{2}$.
Calculons l'aire de la surface bleue.



Si x est un réel de l'intervalle $[-1,4]$, la fonction F définie par $F(x) = \int_{-1}^x f(t)$ est égale à l'aire du trapèze colorié. Donc

$$F(x) = \frac{\left(3 + \frac{5-x}{2}\right)(1+x)}{2} = \frac{(11-x)(1+x)}{4} = \frac{-x^2+10x+11}{4}.$$

La fonction F est bien dérivable sur $[-1,4]$ et

$$\forall x \in [-1,4], \quad F'(x) = \frac{1}{4} \times \left(-2x+10\right) = \frac{5-x}{2} = f(x).$$

11.2 Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

En économie, il arrive en pratique que l'on connaisse la vitesse de variation d'une grandeur comme par exemple le coût marginal (qui est la dérivée du coût total) et que l'on veuille en déduire la valeur de la grandeur (ici la valeur du coût total).
Autrement dit, connaissant la dérivée d'une fonction, comme trouver la fonction d'origine?

Définition 11.3 Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que F est une **primitive de la fonction f sur I** si F est dérivable et si :

$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = f(x).$$

Exemple 11.3

- $F : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 1$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 3x^2 + 6x$.
- $G : x \mapsto e^x - 2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g : x \mapsto e^x$.
- Les fonctions $F : x \mapsto x^2$, $G : x \mapsto x^2 + 1$, mais aussi $H = x \mapsto x^2 + K$, $K \in \mathbb{R}$ sont des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 2x$.
- $H : x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $h : x \mapsto \ln(x)$.

<u>*Remarque*</u> *:*

- *Comme F est dérivable sur I, la fonction F est en particulier continue sur I.*
- *Il n'y a pas unicité de la primitive d'une fonction donnée f. C'est pourquoi on parle* ***d'une*** *primitive de la fonction f et non de* ***la*** *primitive de la fonction f.*

Théorème 11.2

- Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.
- Si F est une primitive de f sur I, alors toute autre primitive de f sur I est la forme
$$F + c \quad \text{où } c \text{ est une constante.}$$
- Il existe **une et une seule** primitive de f sur I qui prend une valeur donnée en un point donné :
Si $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$.

Exemple 11.4 Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2 - 1$ est la primitive de la fonction $f : x \mapsto 2x$ qui vérifie $F(1) = 0$.

En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 2x = f(x)$ et $F(1) = 1^2 - 1 = 0$.

Primitives usuelles

Étant donné la définition d'une primitive, certains résultats connus pour les fonctions dérivées se prolongent aux fonctions primitives.

- Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
- Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I.

Les formules suivantes sont valables sur tout intervalle où la fonction est continue. Par ailleurs, C désigne une constante réelle.

f **est définie sur** I **par**	**une primitive** F **est donnée par**
$f(x) = a \qquad (a \in \mathbb{R})$	$F(x) = ax + C$
$f(x) = x^\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert + C$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x + C$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$

Exemple 11.5 Calculer les primitives des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 3x^2$

$$F(x) = 3 \times \frac{x^3}{3} + C = x^3 + C$$

2. $f(x) = x + \frac{3}{2}$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + C$$

3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

On remarque que $f(x) = x^{-2}$ et donc on a :

$$F(x) = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

4. $f(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{x^2}$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 3 \times \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + C = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{x} + C$$

5. $f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 2\sqrt{x} + C = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2\sqrt{x} + C$$

6. $f(x) = \dfrac{6x^2 - 8x + 2}{5}$

$$F(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x}{5} + C$$

7. $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$

$$F(x) = \mathrm{e}^x + \ln|x|$$

11.2.1 Primitives des fonctions composées usuelles

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

fonction f	**une primitive F est donnée par**
$f = u' \times u^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$F = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$f = \dfrac{u'}{u^2}$	$F = -\frac{1}{u} + C$
$f = \dfrac{u'}{u}$	$F = \ln\|u\| + C$
$f = u'\mathrm{e}^u$	$F = \mathrm{e}^u + C$
$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u} + C$

Méthode 11.1 (Calculer une primitive d'une fonction composée)

1. On repère la forme de la fonction ($u' \times u^n$ ou $\frac{u'}{u^n}$, etc.).
2. On **identifie** la fonction u et on **calcule** sa dérivée u'.
3. On compare la forme repérée avec la fonction de départ. Deux possibilités :
   - la forme repérée correspond exactement à la fonction de départ, auquel cas une primitive est directement donnée par la formule du tableau,
   - la forme repérée est de la forme $k \times f(x)$, auquel cas une primitive est donnée par la formule du tableau **multipliée par** $\frac{1}{k}$.

Exemple 11.6 Calculer une primitive pour chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = (2x+1)^2$

   f semble être de la forme $u'u^2$ avec $u(x) = 2x+1$. Puisque $u'(x) = 2$, alors
   $$u'(x)u(x)^2 = 2(2x+1)^2 = 2f(x).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
   $$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u(x)^3}{3} = \frac{1}{6}(2x+1)^3.$$

2. $f(x) = xe^{x^2}$.

   f semble être de la forme $u'e^u$ avec $u(x) = x^2$. Or $u'e^u = 2xe^{x^2}$ ainsi $xe^{x^2} = \frac{1}{2}u'e^u$. On a donc :
   $$F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

3. $f(x) = \frac{1}{(1-3x)^2}$

   f semble être de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1-3x$. Puisque $u'(x) = -3$, alors
   $$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{-3}{(1-3x)^2} = -3f(x).$$

4. $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$.

   f semble être de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = x^2+x+1$. On a : $\frac{u'}{u^2} = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ ainsi $g(x) = \frac{u'}{u^2}$. On a donc :
   $$F(x) = -\frac{1}{x^2+x+1} + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

5. $f(x) = \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}$.

   f semble être de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^{2x} - 1$. Or $\frac{u'}{u} = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1} = h(x)$. On a donc :

   $$F(x) = \ln|e^{2x} - 1| + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

6. $f(x) = (2x-1)(x^2-x+1)^3$

   f semble être de la forme $u'u^3$ avec $u(x) = x^2 - x + 1$. Puisque $u'(x) = 2x - 1$, alors

   $$u'(x)u(x)^3 = (2x-1)(x^2-x+1)^3 = f(x).$$

   Donc une primitive de f est donnée par

   $$F(x) = \frac{u(x)^4}{4} = \frac{(x^2-x+1)^4}{4}.$$

Méthode 11.2 **(Déterminer la primitive vérifiant une condition donnée)** Pour déterminer **la** primitive F d'une fonction f vérifiant une condition donnée :

1. On commence par déterminer la forme générale de toutes les primitives de la fonction f : elles sont toutes de la forme $F + C$.
2. On utilise ensuite la condition que doit vérifier la primitive demandée pour déterminer la valeur de la constante C.

Exemple 11.7 Calculer la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ qui vérifie la condition $F(1) = 1$.

Je commence par déterminer la forme générale des primitives de f. f est un polynôme donc je peux calculer une primitive terme à terme :

$$F(x) = 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 2x + C = x^3 - 2x^2 + 2x + C.$$

Je dois maintenant déterminer la valeur de la constante C. Je sais que $F(1) = 1$ donc

$$1^3 - 2 \times 1^2 + 2 + C = 1.$$

Autrement dit, $2 + C = 1$. Donc $C = -1$ et la primitive F de f qui vérifie $F(1) = 1$ est

$$F(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1.$$

11.3 Intégration sur un segment

11.3.1 Définition

Définition 11.4 Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I. Soit F une primitive de f sur I. On appelle **intégrale de** f entre a et b le nombre réel $F(b)-F(a)$, noté $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$:

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b)-F(a).$$

Remarque : Puisqu'il s'agit de la différence entre deux termes, le résultat ne dépend pas de la primitive F choisie.

Exemple 11.8 Calculer chacune des intégrales.

1. $\displaystyle\int_1^3 3t^2+2t-1\mathrm{d}t$

   Je commence par calculer une primitive de la fonction $f(t)=3t^2+2t-1$. Il s'agit d'un polynôme donc je peux calculer une primitive terme à terme :

   $$F(t)=3\frac{t^3}{3}+2\frac{t^2}{2}-1t=t^3+t^2-t.$$

   Dès lors, l'intégrale se calcule grâce à cette primitive :

   $$\int_1^3 3t^2+2t-1=\left[t^3+t^2-t\right]_1^3=\left(3^3+3^2-3\right)-\left(1^3+1^2-1\right)=33-1=32.$$

2. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$

   On a : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t}\mathrm{d}t=[\ln(t)]_1^{\mathrm{e}}=\ln(\mathrm{e})-\ln(1)=1.$

3. $\displaystyle\int_{-1}^1 (\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x$

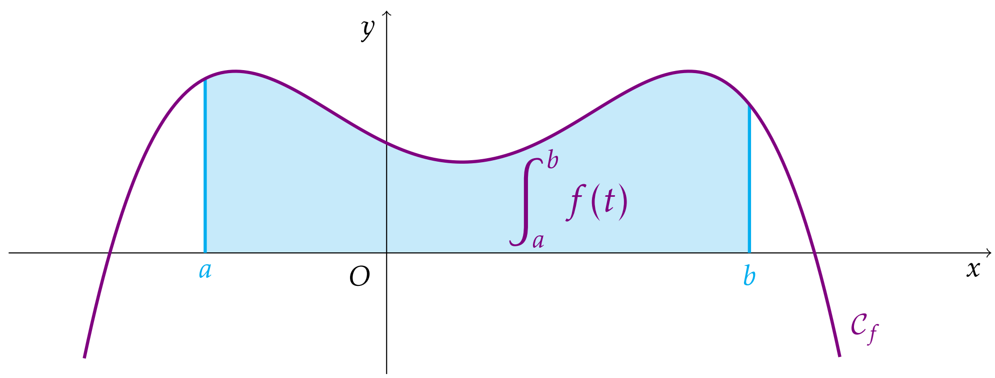
   On a : $\displaystyle\int_{-1}^1 (\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x=\left[\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right]_{-1}^1=\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}=0.$

Proposition 11.1 Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b dans I. On a alors :

$$\int_a^a f(t)\mathrm{d}t=0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t=-\int_b^a f(t)\mathrm{d}t.$$

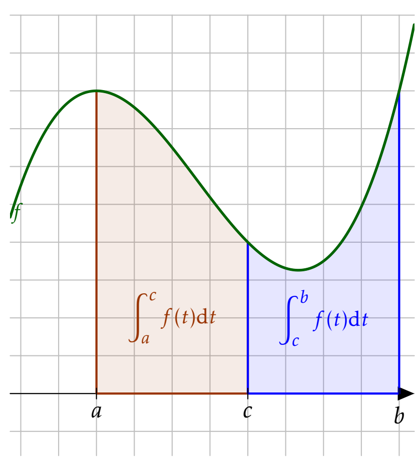
11.3.2 Premières propriétés

Proposition 11.2 Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$. Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$. Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. Alors $\int_a^b f(t)$ est l'aire de la surface comprise entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.



Proposition 11.3 **(Relation de Chasles)** Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a, b et c dans I. Alors :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$



Méthode 11.3 **(Calculer l'intégrale d'une fonction f définie « par morceaux »)** Pour calculer l'intégrale d'une fonction f dont l'expression est définie en plusieurs morceaux, on utilise la relation de Chasles. On décompose ainsi l'intégrale de f sur chaque intervalle sur lequel on connaît l'expression de f.

Exemple 11.9 Soit f la fonction définie sur $[-2,3]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\frac{1}{x^2} & \text{si } 1 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

Calculer $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)x$.

J'applique la relation de Chasles pour décomposer l'intégrale en deux morceaux sur lesquels je connais l'expression de f puis je remplace $f(x)$ par ces expressions :

$$\int_{-2}^{3} f(x)x = \int_{-2}^{1} f(x)x + \int_{1}^{3} f(x)x = \int_{-2}^{1} x+1x + \int_{1}^{3} -\frac{1}{x^2}x.$$

Il ne me reste alors plus qu'à calculer ces deux intégrales.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{3} f(x)x &= \int_{-2}^{1} x+1x + \int_{1}^{3} -\frac{1}{x^2}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-2}^{1} + \left[\frac{1}{x}\right]_{1}^{3} \\ &= \left(\frac{1^2}{2}+1\right) - \left(\frac{(-2)^2}{2}+(-2)\right) + \frac{1}{3} - \frac{1}{1} \\ &= \frac{1}{2}+1-2+2+\frac{1}{3}-1 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

11.4 Calculs d'intégrales

11.4.1 Primitives usuelles

On trouve directement une primitive de la fonction à intégrer grâce au tableau des primitives usuelles :

Exemple 11.10 $I = \displaystyle\int_{1}^{2} \frac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}\,\mathrm{d}t$

Une primitive de $f(t)$ est $F(t) = -\frac{1}{t^2+t+1}$ comme déterminée dans l'Exemple 16.3. On a alors :

$$I = -\left[\frac{1}{t^2+t+1}\right]_{1}^{2} = -\frac{1}{7} + \frac{1}{3} = \frac{4}{21}.$$

11.4.2 Intégration par parties

Proposition 11.4 Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et soient a et b dans I. Alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t.$$

Exemple 11.11 Calcul de $I_1 = \int_0^1 t\mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.

Posons $\begin{cases} u(t) & = t \\ v'(t) & = \mathrm{e}^t \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) & = 1 \\ v(t) & = \mathrm{e}^t \end{cases}$.

Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} I_1 = \int_0^1 t \times \mathrm{e}^t \mathrm{d}t = \int_0^1 u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\ &= [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\ &= \left[\mathrm{e}^t \times t\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^t \mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e} - \left[\mathrm{e}^t\right]_0^1 \\ &= \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Exemple 11.12 $I_2 = \displaystyle\int_1^2 x\ln(x)x$

Posons

$$\begin{aligned} u'(x) &= x & u(x) &= \tfrac{x^2}{2} \\ v(x) &= \ln(x) & v'(x) &= \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^2 u'(x)v(x) = \Big[u(x)v(x)\Big]_1^2 - \int_1^2 u(x)v'(x)x \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x}x = 2\ln(2) - \int_1^2 \frac{x}{2}x \\ &= 2\ln(2) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln(2) - \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 2\ln(2) - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Exemple 11.13 Calcul de $I_3 = \displaystyle\int_1^3 \ln(x)\mathrm{d}x$.

Posons $\begin{cases} u(x) & = \ln(x) \\ v'(x) & = 1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) & = \frac{1}{x} \\ v(x) & = x \end{cases}$.

Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} I_3 = \int_1^3 1 \times \ln(x)\mathrm{d}x = \int_1^3 u(x)v'(x)\mathrm{d}x \\ &= [u(x)v(x)]_1^3 - \int_1^3 u'(x)v(x)\mathrm{d}x \\ &= [x\ln(x)]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{x} \times x\mathrm{d}x \\ &= 3\ln(3) - 0 - (3-1) \\ &= 3\ln(3) - 2 \end{aligned}$$

11.4.3 Changement de variables

Proposition 11.5 Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha;\beta]$ telle que $u([\alpha;\beta]) \subseteq [a;b]$. Alors :

$$\int_\alpha^\beta f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(t)\mathrm{d}t.$$

Méthode 11.4 En pratique :

1. on pose le changement de variable $t = u(x)$.
2. on calcule l'élément différentiel : $\mathrm{d}t = u'(x)\mathrm{d}x$
3. on détermine la nouvelle fonction à intégrer : $f(u(x)) = f(t)$
4. on détermine les nouvelles bornes de l'intégrale :
   - si $x = \alpha$ alors $t = u(\alpha)$
   - si $x = \beta$ alors $t = u(\beta)$

Exemple 11.14 Calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $t = 2x + 1$.

Corrigé:

1. On pose le changement de variable : $t = 2x + 1 = u(x)$. Ainsi, $x = \frac{t-1}{2}$.
   La fonction $u : x \mapsto 2x + 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ et $\forall x \in [0;1],\ u'(x) = 2$.

2. On calcule l'élément différentiel : $\mathrm{d}t = u'(x)\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

3. On détermine la nouvelle fonction à intégrer :

$$\frac{x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{\frac{t-1}{2}}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \times \frac{t-1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

4. On détermine les nouvelles bornes de l'intégrale :

   - Si $x = 0$ alors $t = 1$.
   - Si $x = 1$ alors $t = 3$.

   Donc, par changement de variable, on obtient :

$$I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \times \frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_1^3 \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t.$$

Il reste à calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t$.
Par linéarité de l'intégrale, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t &= \int_1^3 \sqrt{t}\mathrm{d}t - \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \\
&= \int_1^3 t^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t - \int_1^3 t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_1^3 - \left[\frac{t^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1}\right]_1^3 \\
&= \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^3 - \left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_1^3 \\
&= \left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_1^3 - \left[2\sqrt{t}\right]_1^3 \\
&= \frac{2}{3} \times 3\sqrt{3} - \frac{2}{3} - 2\sqrt{3} + 2 \\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Et finalement,

$$I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}.$$