

10. Optimisation des fonctions de deux variables

10.1	Lignes de niveau	1
	10.1.1 Introduction sur un exemple	
	10.1.2 Définition et propriétés	
10.2	Optimisation sans contrainte	5
	10.2.1 Définition	
	10.2.2 Conditions nécessaires du premier ordre	
	10.2.3 Conditions suffisantes du second ordre	
10.3	Optimisation sous contrainte d'égalité	11
	10.3.1 Méthode par substitution	
	10.3.2 Méthode de Lagrange	

L'illumination n'est que la vision soudaine, par l'esprit, d'une route lentement préparée.

Antoine de Saint Exupéry

Ce chapitre fait suite au chapitre précédent sur les fonctions de deux variables. On commence par définir et voir comment on peut interpréter des lignes de niveau pour des fonctions de deux variables.

On expose ensuite les méthodes permettant d'étudier les extrema des fonctions de deux variables. On recherchera les extrema de plusieurs manières :

- *Sur tout le domaine de définition de la fonction, on parlera alors d'**optimisation sans contrainte** ou d'**optimisation libre**.*
- *En ne considérant que les variables (x, y) appartenant au domaine de définition et vérifiant également une égalité du type $g(x, y) = c$ avec c une constante, on parlera alors d'**optimisation sous contrainte d'égalité**.*

10.1 Lignes de niveau

10.1.1 Introduction sur un exemple

Considérons la fonction suivante : $f(x, y) = x^2(y - 1)$.

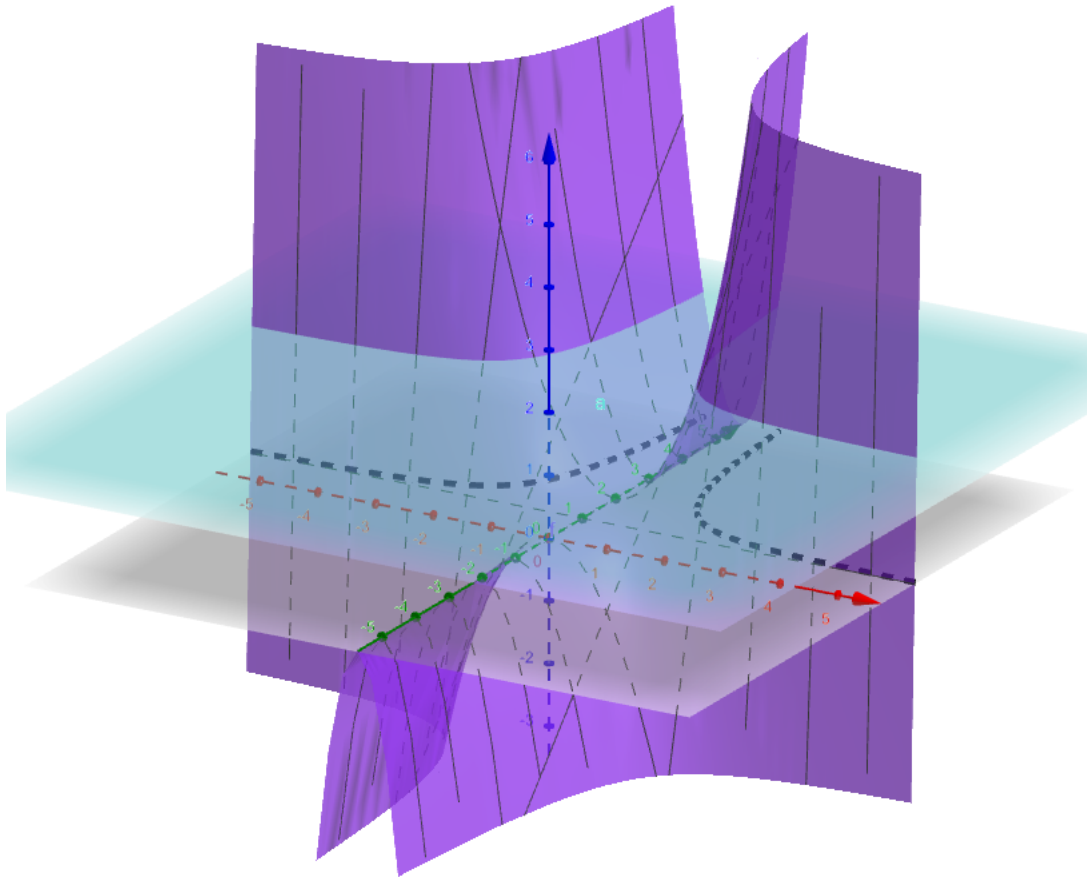
Fixons une valeur à $f(x, y)$, par exemple $f(x, y) = 2$. On a :

$$f(x, y) = 2 \iff x^2(y - 1) = 2 \iff y = \frac{2}{x^2} + 1, x \neq 0$$

On obtient alors l'équation d'une courbe du plan \mathbb{R}^2 . Graphiquement, fixer $f(x, y) = 2$ revient à ne retenir que les points à l'intersection de la surface $z = f(x, y)$ et du plan $z = 2$.

L'équation de cette courbe, dans le plan $z = 2$, est $x^2(y - 1) = 2$.

Dans le plan, la courbe d'équation $x^2(y - 1) = 2$ est appelée **courbe de niveau 2 de la fonction f** .



Remarque : Sur le graphe ci-dessus, la ligne de niveau a été projetée sur le plan $z = 0$ et y apparaît en pointillés. Cette courbe en pointillés correspond bien à l'intersection entre la surface violette et le plan bleu d'équation $z = 2$.

10.1.2 Définition et propriétés

Définition 10.1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

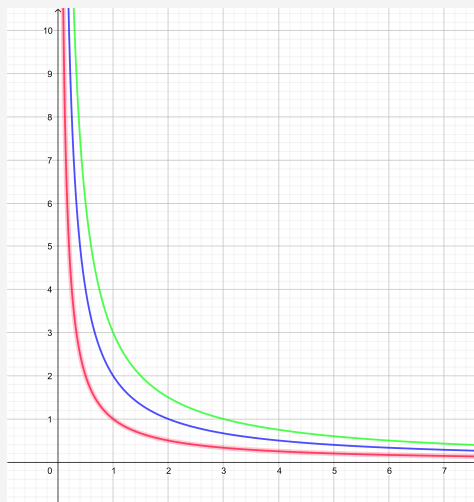
La courbe du plan $f(x, y) = K$ où K est une constante est appelée **ligne de niveau K** ou **courbe de niveau K** .

Exemple 10.1 En économie, en théorie du consommateur, on définit les fonctions d'utilité $U(x, y)$ qui mesurent la satisfaction que le consommateur retire s'il dispose de quantités x et y de deux biens considérés.

Ainsi pour une fonction d'utilité la courbe de niveau d'équation $U(x, y) = k$ est appelée **courbe d'indifférence** : c'est l'ensemble de toutes les combinaisons (x, y) des deux biens pour lesquelles le consommateur retire le même niveau k de satisfaction.

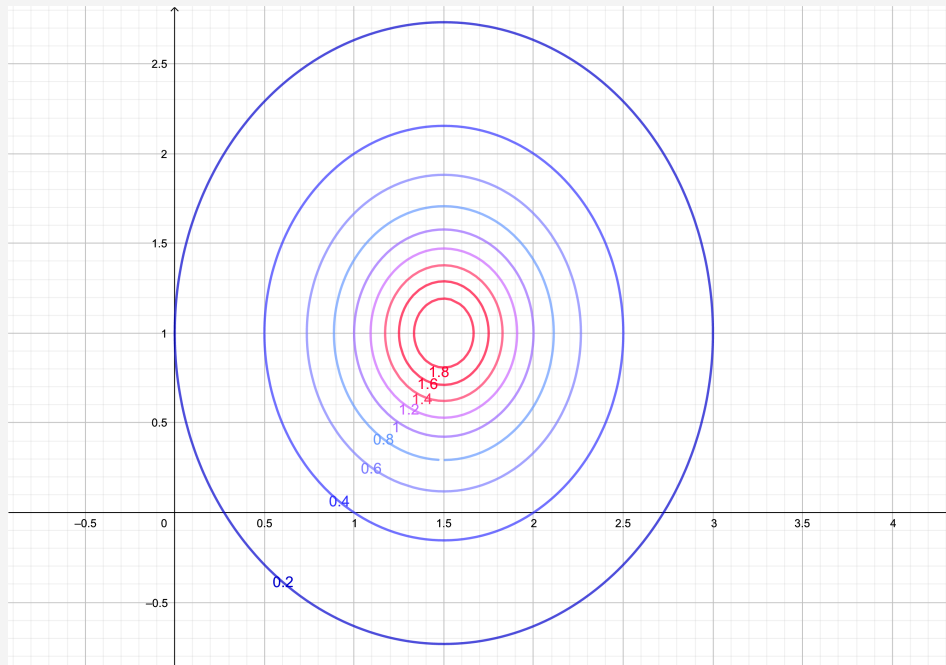
Sur la figure ci-dessous, on a représenté les courbes d'indifférence pour la fonction d'utilité $U(x, y) = xy$.

De la gauche vers la droite, on a : $U(x, y) = 1$, $U(x, y) = 2$ et $U(x, y) = 3$.



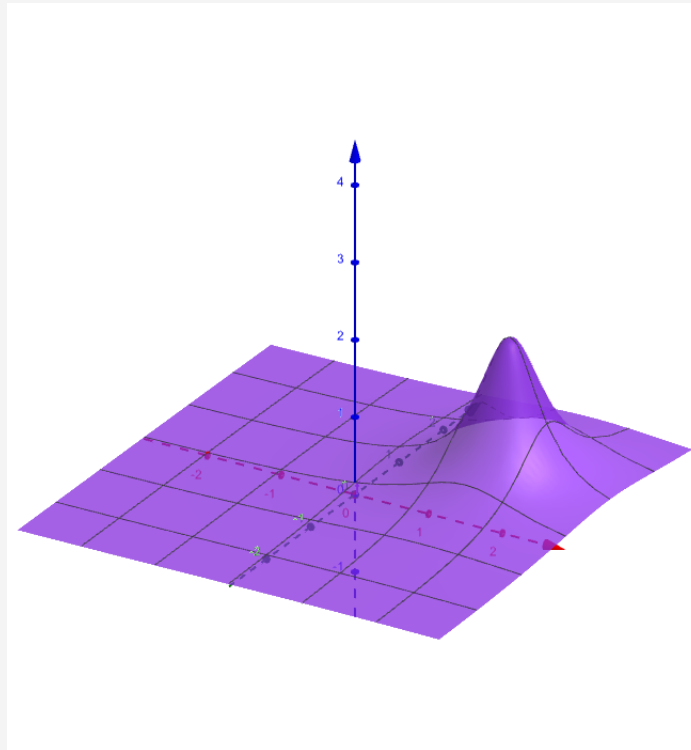
On peut construire sur le plan (x, y) toute une série de courbes de niveau. Cela ne permet pas seulement de représenter le lien entre x et y pour $f(x, y)$ fixé, mais aussi de représenter sur un plan toute la structure de la surface $z = f(x, y)$. En effet, plus les lignes de niveau se resserrent, et plus $f(x, y)$ croît ou décroît rapidement. On arrive ainsi avec des courbes planes à se faire une bonne idée de la surface $z = f(x, y)$.

Exemple 10.2 Considérons la fonction $f(x, y) = \frac{2}{(2x-3)^2 + 3(y-1)^2 + 1}$. On a représenté ci-dessous toutes les lignes de niveau $f(x, y) = k$ pour k variant de 0.2 à 1.8 avec un pas de 0.2.



Les lignes de niveau se resserrent autour du point $(1.5, 1)$ et indiquent donc un pic en $x = 1.5$ et $y = 1$.

On observe bien cela lorsqu'on trace la surface représentant f .



Remarque : Sur les graphiques précédents, on peut remarquer que les lignes de niveau ne se croisaient pas. C'est, en fait, une propriété générale.



Propriété 10.1 Pour une même fonction, des lignes de niveau différentes n'ont pas d'intersection.

10.2 Optimisation sans contrainte

Soit f une fonction définie sur un ensemble \mathcal{D}_f de \mathbb{R}^2 .

Nous allons chercher les éventuels extrema de f . C'est à dire la valeur la plus grande ou la plus petite prise par f (selon les situations...) ainsi que les points pour lesquels ces extrema sont atteints.

10.2.1 Définition

Définition 10.2 Soit (x_0, y_0) un point de \mathcal{D}_f .

- La fonction f présente un **maximum global** en (x_0, y_0) si

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}_f, \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

- La fonction f présente un **minimum global** en (x_0, y_0) si

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}_f, \quad f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

Définition 10.3 Soit (x_0, y_0) un point de \mathcal{D}_f .

- La fonction f présente un **maximum local** en (x_0, y_0) si il existe un sous-ensemble \mathcal{D} de \mathcal{D}_f tel que

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}, \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

- La fonction f présente un **minimum local** en (x_0, y_0) si il existe un sous-ensemble \mathcal{D} de \mathcal{D}_f tel que

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}, \quad f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

Exemple 10.3 Soit pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.

On remarque que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \geq 0$ et $f(0, 0) = 0$. Ainsi pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) \geq f(0, 0).$$

Ainsi 0 est un minimum global de f et il est atteint en $(0, 0)$.

Remarque : Un extremum global est en particulier local.



10.2.2 Conditions nécessaires du premier ordre

On a vu dans le Chapitre 8 que si une fonction f d'une variable présentait un extremum local en x_0 sur un intervalle ouvert de son ensemble de définition et si elle était dérivable en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.

On dispose d'un résultat analogue pour les fonctions de plusieurs variables.

Théorème 10.1 Soit f une fonction définie sur un ensemble \mathcal{D}_f de \mathbb{R}^2 et (x_0, y_0) appartenant à un ensemble ouvert inclus dans \mathcal{D}_f .

Si f est différentiable en (x_0, y_0) et si f admet un extremum local en (x_0, y_0) , alors on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Définition 10.4 Ces égalités s'appellent les conditions du premier ordre (du problème d'optimisation). Tout point (x_0, y_0) vérifiant ces conditions est appelé **point critique** (du problème d'optimisation).

Exemple 10.4 Reprenons la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$.

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Ainsi f possède un unique point critique $(0, 0)$. Il se trouve que dans cet exemple, qu'en ce point critique est f admet un minimum global.



Attention ! Soulignons que ces conditions du premier ordre sont des conditions nécessaires mais, en général, ne sont pas suffisantes de sorte qu'un point critique n'est pas forcément un extremum.

Si on considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = xy$, différentiable sur \mathbb{R}^2).

On remarque $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Cependant, f ne présente pas d'extremum local en $(0, 0)$. (cf surface sur Geogebra)

Exercice 10.1 On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Déterminer ses points critiques.

Commençons par calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction f , on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x.$$

On résout ensuite le système $\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$.

La deuxième ligne donne $x = y^2$ et on injecte cela dans la première ligne. Cela donne :

$$3(y^2)^2 - 3y = 0 \quad \text{soit} \quad y^4 - y = 0 \quad \text{soit} \quad y(y^3 - 1) = 0.$$

Ainsi soit $y = 0$ et alors $x = 0^2$ ou bien $y = 1$ et $x = 1^2 = 1$.

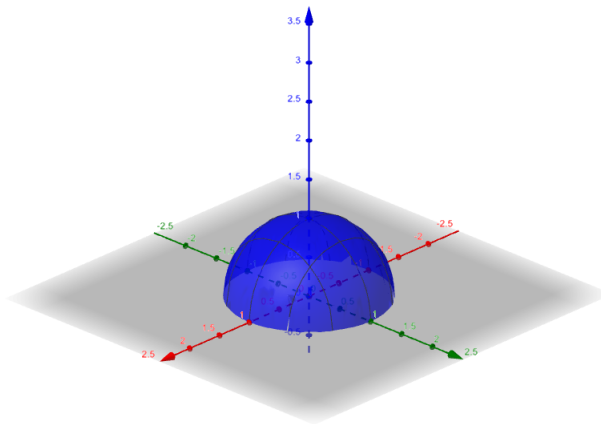
En conclusion, la fonction f possède deux points critiques : $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

Attention ! Une fonction peut admettre un extremum sur la frontière sans que les dérivées partielles s'annulent.



Soit la fonction $f : (x, y) \mapsto \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$, elle est définie sur le disque fermé de centre O et de rayon 1.

Elle admet pour minimum 0, il est atteint sur le cercle de centre O de rayon 1 et pourtant les dérivées partielles ne s'annulent en aucun point du cercle.



10.2.3 Conditions suffisantes du second ordre

Soient f une fonction définie sur un ensemble \mathcal{D}_f de \mathbb{R}^2 et (x_0, y_0) un point appartenant à un sous-ensemble ouvert de \mathcal{D}_f . Supposons que:

- (x_0, y_0) est un point critique (c'est à dire $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$)
- les dérivées partielles de f sont continues en (x_0, y_0)

On introduit les notations de Monge :

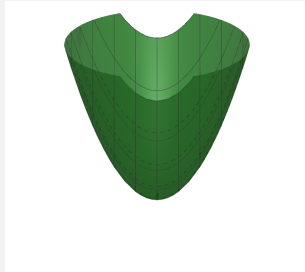
- $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ et • $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$
- $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ (d'après le théorème de Schwarz)

On a alors le théorème suivant :

Théorème 10.2 Posons $\delta = rt - s^2$.

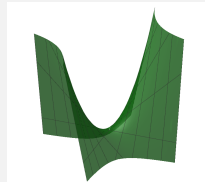
• Si $\delta > 0$ alors f admet un extremum local en (x_0, y_0) . De plus:

- Si $r > 0$, il s'agit d'un minimum local.
- Si $r < 0$, il s'agit d'un maximum local.



• Si $\delta < 0$ alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0) .

On dit que f présente un col en (x_0, y_0) ou encore qu'en (x_0, y_0) , on a un point-selle.



• Si $\delta = 0$ alors on ne peut rien conclure.

Exemple 10.5 Reprenons l'exemple de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$.

On avait trouvé un unique point critique $(0, 0)$. On a alors :

- $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2$
- $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 2$
- $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$

Ainsi $\delta = rt - s^2 = 4 > 0$ et $r = 2 > 0$, on retrouve bien qu'en $(0, 0)$, la fonction f admet un minimum local.

Méthode 10.1 (Pour étudier les extrema d'une fonction de deux variables, sans contrainte)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables deux fois différentiables.

1. On cherche les points critiques de f en résolvant le système :
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}.$$
2. On calcule les dérivées partielles d'ordre 2 et pour chaque point critique (x_0, y_0) , on calcule :
 - $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$
 - $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$
 - $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$
3. On calcule ensuite $\delta = rt - s^2$.
 - Si $\delta > 0$, deux cas se présentent :
 - Si $r > 0$, f admet un **minimum local** en (x_0, y_0) .
 - Si $r < 0$, f admet un **maximum local** en (x_0, y_0) .
 - Si $\delta < 0$, f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0) . C'est un **point-selle**.
 - Si $\delta = 0$, on ne peut rien conclure avec cette méthode. Il faut étudier la nature du point critique par d'autres moyens (souvent guidés dans les exercices).

Exemple 10.6 Reprenons la fonction $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ dont nous avons déterminé les points critiques précédemment. Déterminons la nature de ses points critiques.

Pour cela commençons par calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f . Rappelons que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x.$$

Ainsi :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y.$$

On a alors au point $(0, 0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0.$$

Calculons $\delta = rt - s^2$. On a :

$$\delta = 0 \times 0 - (-1)^2 = -1 < 0$$

Le point $(0, 0)$ est donc un point-selle pour f .

On a alors au point $(1, 1)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 6 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1) = -1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = 6.$$

Calculons $\delta = rt - s^2$. On a :

$$\delta = 6 \times 6 - (-1)^2 = 36 - 1 = 35 > 0$$

De plus $r = 6 > 0$, f possède donc un minimum local en $(1, 1)$ et il vaut $f(1, 1) = 2 - 3 = -1$.

Exercice 10.2 On considère les trois fonctions suivantes définies sur \mathbb{R}^2 :

- $f_1(x, y) = x^2 + y^4$
- $f_2(x, y) = -x^2 - y^4$
- $f_3(x, y) = x^2 - y^4$

1. Déterminer les points critiques de chacune de ces fonctions.

On a pour f_1 :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 4y^3.$$

La résolution du système $\begin{cases} 2x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases}$ donc immédiatement $(x, y) = (0, 0)$.

Ainsi f_1 possède un unique point critique $(0, 0)$.

On a pour f_2 :

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = -2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = -4y^3.$$

La résolution du système $\begin{cases} -2x = 0 \\ -4y^3 = 0 \end{cases}$ donc immédiatement $(x, y) = (0, 0)$.

Ainsi f_2 possède un unique point critique $(0, 0)$.

On a pour f_3 :

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y) = -4y^3.$$

La résolution du système $\begin{cases} 2x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases}$ donc immédiatement $(x, y) = (0, 0)$. Ainsi f_3 possède un unique point critique $(0, 0)$.

2. Déterminer leur nature.

On a pour f_1 :

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x, y) = 2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$$

Ainsi en $(0, 0)$, $rt - s^2 = 2 \times 0 - 0^2 = 0$. On ne peut donc pas conclure avec cette méthode.

On remarque que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f_1(x, y) \geq 0$ soit $f_1(x, y) \geq f_1(0, 0)$. Ainsi 0 est un minimum global pour f_1 et il est atteint en $(0, 0)$.

On a pour f_2 :

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x, y) = -2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x, y) = -12y^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$$

Ainsi en $(0, 0)$, $rt - s^2 = -2 \times 0 - 0^2 = 0$. On ne peut donc pas conclure avec cette méthode.

On remarque que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f_2(x, y) \leq 0$ soit $f_2(x, y) \leq f_2(0, 0)$. Ainsi 0 est un un maximum global pour f_2 et il est atteint en $(0, 0)$.

On a pour f_3 :

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}(x, y) = 2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x, y) = -12y^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$$

Ainsi en $(0, 0)$, $rt - s^2 = 2 \times 0 - 0^2 = 0$. On ne peut donc pas conclure avec cette méthode.

On remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_3(2t^2, t) = 4t^4 > 0 = f(0, 0)$ donc 0 n'est pas un minimum local.

On remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_3(t^2, 2t) = -15t^4 < 0 = f(0, 0)$ donc 0 n'est pas un maximum local.

Ainsi le point $(0, 0)$ est un point-selle pour f_3 .

10.3 Optimisation sous contrainte d'égalité

On veut étudier l'existence d'un extremum local de la fonction f dérivable soumise à la contrainte d'égalité $g(x, y) = 0$.

Reprenons l'exemple des fonctions d'utilité en micro-économie du consommateur. Notons U une fonction d'utilité dépendant de deux biens dont les quantités respectives sont x et y . La valeur $U(x, y)$ donne un indice de satisfaction associé au panier de consommation (x, y) .

On peut vouloir maximiser la fonction U tout en respectant une contrainte budgétaire. Notons p le prix du premier bien et q le prix du second bien, on veut maximiser U tout en vérifiant $px + qy = R$ où R est le revenu du consommateur.

Nous allons présenter ici deux méthodes permettant de résoudre ce type de problèmes.

10.3.1 Méthode par substitution

Si, à partir de la contrainte, on peut exprimer une variable en fonction de l'autre, par exemple y en fonction de x , on se ramène à la recherche d'un extremum d'une fonction d'une seule variable en remplaçant dans $f(x, y)$ la variable y par son expression en fonction de x . On se ramène alors à l'étude d'une fonction d'une variable réelle.

Exemple 10.7 Étudions l'existence d'extremum de la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = xy$ sous la contrainte d'égalité $g(x, y) = x + y - 6 = 0$.

Notons $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$. On remarque que :

$$g(x, y) = 0 \iff x = 6 - y.$$

Ainsi pour $(x, y) \in A$, $f(x, y) = (6 - y)y = 6y - y^2$.

Posons alors $h(y) = 6y - y^2$. On est alors ramené à un problème d'optimisation d'une fonction à une variable. Cette fonction est deux fois dérivable et on a :

$$h'(y) = 6 - 2y.$$

On a alors :

$$h'(y) = 0 \iff 6 - 2y = 0 \iff y = 3.$$

h possède donc un unique point critique $y_0 = 3$ et on a $h''(y) = -2$ donc $h''(y_0) = -2$. Ainsi h admet un maximum local en y_0 .

Revenons ensuite à f , on a $x_0 = 6 - y_0 = 3$. Ainsi f admet un maximum local en $(3, 3)$.

Exercice 10.3 L'utilité de deux biens en quantité x et y est donnée par $U(x, y) = x^4y$. Leurs coûts unitaires sont respectivement de 20 euros et 10 euros. Optimiser l'utilité du consommateur disposant d'un budget de 1500 euros.

Commençons par déterminer la contrainte $g(x, y) = 0$.

Les coûts unitaires des deux biens étant de 20 euros et 10 euros respectivement, pour des quantités (x, y) données, le coût est donc de $20x + 10y$.

Ici le budget du consommateur est de 1500 euros, on a donc la contrainte :

$$20x + 10y = 1500.$$

En posant, $g(x, y) = 20x + 10y - 1500$, cette contrainte s'écrit $g(x, y) = 0$.

Notons $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$. On remarque que :

$$g(x, y) = 0 \iff y = \frac{1500 - 20x}{10} = 150 - 2x.$$

Ainsi pour $(x, y) \in A$, $U(x, y) = x^4(150 - 2x) = 150x^4 - 2x^5$.

Posons alors $h(x) = 150x^4 - 2x^5$. On est alors ramené à un problème d'optimisation d'une fonction à une variable. Cette fonction est deux fois dérivable et on a :

$$h'(x) = 4 \times 150x^3 - 2 \times 5x^4 = 600x^3 - 10x^4 = 10x^3(60 - x).$$

On a alors :

$$h'(x) = 0 \iff 10x^3 = 0 \text{ ou } 60 - x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 60.$$

h possède donc deux points critiques $x_0 = 0$ et $x_1 = 60$.

Calculons alors la dérivée seconde de h :

$$h''(x) = 3 \times 600x^2 - 4 \times 10x^3 = 1800x^2 - 40x^3 = 40x^2(45 - x)$$

On a pour le point critique $x_1 = 60$,

$$h''(x_1) = 40 \times (60)^2(45 - 60) = 40 \times (60)^2 \times (-15) < 0.$$

Ainsi h admet un maximum local en x_1 .

Revenons ensuite à la fonction U , $y_1 = 150 - 2x_1 = 150 - 120 = 30$.

La fonction U possède un maximum local en $(60, 30)$.

Autrement dit, l'utilité des deux biens est maximale lorsqu'ils sont en quantité $(60, 30)$ tout en vérifiant la contrainte budgétaire du consommateur.

Pour le point critique $x_0 = 0$, on a $h''(x_0) = 0$. On ne peut pas conclure directement.

Revenons à U et calculons sa valeur au point critique (x_0, y_0) où $y_0 = 150 - 2 \times 0 = 150$.

On a alors $U(0, 150) = 0$.

On remarque que :

$$\forall y > 0, \quad U(x, y) = x^4 y > 0 \quad \text{et} \quad \forall y < 0, \quad U(x, y) = x^4 y < 0.$$

Ainsi U n'admet pas d'extremum en $(0, 150)$. C'est un point-selle.

10.3.2 Méthode de Lagrange

Il arrive qu'il ne soit pas aisé - voire impossible - d'exprimer une variable en fonction de l'autre en utilisant la contrainte $g(x, y) = 0$. La méthode de Lagrange permet de résoudre cette difficulté.

Méthode 10.2 Un extremum de la fonction de deux variables f soumise à la contrainte $g(x, y) = 0$ est un extremum libre de la fonction de trois variables, notée L , appelée le **lagrangien** de f , définie par :

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

La variable auxiliaire λ est appelée **multiplicateur de Lagrange**.

On recherche ensuite les points critiques et leur multiplicateur associé à l'aide des conditions du premier ordre appliquées à la fonction L :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0$$

Puis on étudie pour chaque point critique trouvé (x_0, y_0) le signe de l'expression $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ qui est une fonction de (h, k) .

Deux cas peuvent se produire :

1. Si $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ a un signe constant lorsque (h, k) est voisin de $(0; 0)$, alors f présente un extremum local en (x_0, y_0) .
 - (a) Si $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \geq 0$, c'est un **minimum local**.
 - (b) Si $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \leq 0$, c'est un **maximum local**.
2. Si $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ n'a pas un signe constant lorsque (h, k) est voisin de $(0; 0)$, alors f ne présente pas d'extremum local en (x_0, y_0) .

Exemple 10.8 Reprenons l'exemple précédent : $f(x, y) = xy$ avec la contrainte $g(x, y) = x + y - 6 = 0$.

Posons le lagrangien associé au problème :

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = xy + \lambda(x + y - 6).$$

Recherchons les points critiques de L , on a :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = y + \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = x + \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = x + y - 6.$$

Pour déterminer les points critiques de L , il nous faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} x + \lambda = 0 \\ y + \lambda = 0 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Faisons $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient :

$$\begin{cases} x + \lambda = 0 \\ y + \lambda = 0 \\ y - \lambda = 6 \end{cases}$$

Faisons $L_3 \leftarrow L_2 - L_3$, on obtient :

$$\begin{cases} x + \lambda = 0 \\ y + \lambda = 0 \\ 2\lambda = -6 \end{cases}$$

On résout alors facilement le système et on obtient :

$$\lambda = -3, \quad y = 3, \quad x = 3.$$

Calculons alors pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(3+h, 3+k) = 0$, la quantité $f(3+h, 3+k) - f(3, 3)$. On a :

$$\begin{aligned} f(3+h, 3+k) - f(3, 3) &= (3+h)(3+k) - 9 \\ &= 3k + 3h + hk \\ &= 3(h+k) + hk \\ &= hk \quad \text{car } 3+h+3+k-6=0 \text{ soit } h+k=0 \\ &= -k^2 \quad \text{car } h+k=0 \text{ équivaut à } h=-k^2 \end{aligned}$$

Ainsi $f(3+h, 3+k) - f(3, 3) < 0$ et donc on peut affirmer que $(3, 3)$ est un maximum local pour f .

Exercice 10.4 Étudier les extrema de la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$, sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

Ecrivons la contrainte $x^2 + y^2 = 1$ sous la forme $g(x, y) = 0$ en posant $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Formons le lagrangien L associé à ce problème d'optimisation sous contrainte, on a :

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = 6 - 4x - 3y - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Recherchons les points critiques de L , on a :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = -4 + 2x\lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = -3 + 2y\lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 1.$$

Pour déterminer les points critiques de L , il nous faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x\lambda & = & 4 \\ 2y\lambda & = & 3 \\ x^2 + y^2 & = & 1 \end{cases}$$

Exprimons x et y en fonction de λ et injectons cela dans L_3 , on obtient :

$$\begin{cases} x & = & \frac{2}{\lambda} \\ y & = & \frac{3}{2\lambda} \\ \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 & = & 1 \end{cases}$$

La dernière ligne du système est donc égale à : $\frac{4}{\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 1$ soit :

$$4 + \frac{9}{4} = \lambda^2 \quad \text{soit} \quad \lambda^2 = \frac{25}{4}.$$

On a donc soit $\lambda = \frac{5}{2}$ soit $\lambda = -\frac{5}{2}$.

On en déduit les valeurs de x et y associées ce qui nous donne deux points critiques pour L :

$$(x_0, y_0, \lambda_0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}\right) \quad \text{et} \quad (x_1, y_1, \lambda_1) = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{5}{2}\right)$$

Commençons par étudier la nature du point $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ pour f , pour cela étudions le signe de la quantité $f\left(\frac{4}{5} + h, \frac{3}{5} + k\right) - f\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ avec $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g\left(\frac{4}{5} + h, \frac{3}{5} + k\right) = 0$.

On a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{4}{5} + h, \frac{3}{5} + k\right) - f\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) &= 6 - 4\left(\frac{4}{5} + h\right) - 3\left(\frac{3}{5} + k\right) - \left(6 - 4 \times \frac{4}{5} - 3 \times \frac{3}{5}\right) \\ &= -4h - 3k \\ &= -(4h + 3k) \end{aligned}$$

Or on a les équivalences suivantes :

$$g\left(\frac{4}{5} + h, \frac{3}{5} + k\right) = 0 \iff \left(\frac{4}{5} + h\right)^2 + \left(\frac{3}{5} + k\right)^2 - 1 = 0 \iff \frac{8}{5}h + h^2 + \frac{6}{5}k + k^2 = 0$$

soit

$$g\left(\frac{4}{5} + h, \frac{3}{5} + k\right) = 0 \iff -(4h + 3k) = \frac{5}{2}(h^2 + k^2).$$

Ainsi on a :

$$f\left(\frac{4}{5} + h, \frac{3}{5} + k\right) - f\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \frac{5}{2}(h^2 + k^2) > 0$$

La fonction f admet un minimum local en $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

On effectue ensuite un calcul similaire pour déterminer la nature du point $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ pour f .

On étudie le signe de la quantité $f\left(-\frac{4}{5} + h, -\frac{3}{5} + k\right) - f\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ avec $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g\left(-\frac{4}{5} + h, -\frac{3}{5} + k\right) = 0$.

On a :

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{4}{5} + h, -\frac{3}{5} + k\right) - f\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) &= 6 - 4\left(-\frac{4}{5} + h\right) - 3\left(-\frac{3}{5} + k\right) - \left(6 - 4 \times \left(-\frac{4}{5}\right) - 3 \times \left(-\frac{3}{5}\right)\right) \\ &= -4h - 3k \\ &= -(4h + 3k) \end{aligned}$$

Or on a les équivalences suivantes :

$$g\left(-\frac{4}{5} + h, -\frac{3}{5} + k\right) = 0 \iff \left(-\frac{4}{5} + h\right)^2 + \left(-\frac{3}{5} + k\right)^2 - 1 = 0 \iff -\frac{8}{5}h + h^2 - \frac{6}{5}k + k^2 = 0$$

soit

$$g\left(-\frac{4}{5} + h, -\frac{3}{5} + k\right) = 0 \iff -(4h + 3k) = -\frac{5}{2}(h^2 + k^2).$$

Ainsi on a :

$$f\left(-\frac{4}{5} + h, -\frac{3}{5} + k\right) - f\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = -\frac{5}{2}(h^2 + k^2) > 0$$

La fonction f admet un maximum local en $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$.