Introduction à l'algèbre linéaire

Exercice 1 (⋆)

Résoudre le système linéaire triangulaire suivant :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & - & 2y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & 4z & = & -2 \end{array}\right.$$

Exercice 2 (⋆)

Résoudre :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 1 \\ 5x & + & 7y & = & 3 \end{array}\right.$$

Exercice 3 (⋆⋆)

Résoudre :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 4y & = & 10 \\ 3x & + & 6y & = & 15 \end{array}\right.$$

Exercice 4 (⋆⋆)

Résoudre :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 2y & = & 5 \\ -6x & + & 3y & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 5 (⋆⋆⋆)

Résoudre le système suivant.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 6 (⋆⋆⋆)

Résoudre le système suivant.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

Exercice 7 (⋆⋆)

Parmi les espaces suivants, déterminer ceux qui sont des espaces vectoriels :

1. $F_1 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x_1 + x_2 = 1 \right\}$
2. $F_2 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x_1 - 2x_2 = 0 \right\}$
3. $F_3 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x_1 x_2 = 0 \right\}$
4. $F_4 = \left\{ (x_1, x_2, x_3)\mathbb{R}^3 \quad | \quad x_1^2 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$

Exercice 8 (⋆⋆⋆)

On considère le sous-espace suivant :

$$F = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x_1 - 5x_2 = 0 \right\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer une famille génératrice de F.
3. En déduire une base de F.

Exercice 9 (⋆⋆⋆)

On considère le sous-espace suivant :

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x_1 + 2x_2 = 0 \right\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de F.
3. En déduire une base de F.

Exercice 10 (⋆⋆⋆)

On considère le sous-espace suivant :

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ | \ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de F.
3. En déduire une base de F.

Exercice 11 (⋆⋆⋆⋆)

On considère les deux ensembles suivants :

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \right\}$$

et $G = \left\{ (a - b, a + b, a - 3b) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer des bases de F et G.

Exercice 12 (⋆⋆)

Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f((x, y, z)) = x + y + 2z$
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f((x, y)) = x + y + 1$
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f((x, y)) = xy$
4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f((x, y)) = (xy, y)$
5. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f((x, y)) = (2x - 4y, 2)$
6. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f((x, y)) = (2x - 4y, 0)$
7. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f((x, y)) = (x^2, y^3)$

Exercice 13 ($\star\star\star$)

Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$f((x,y)) = (x+y, x-y, 2x+2y)$$
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,
$$f((x,y,z)) = (x+y+z, x+y+z, -2x-2y-2z)$$
3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,
$$f((x,y,z)) = (x+2y+3z, x+3y+5z, x+4y+7z)$$

Exercice 14 ($\star$)

Déterminer la norme des vecteurs suivants :

1. $(3,4)$
2. $(0,-3)$
3. $(-1,-1)$
4. $(1,2,3)$

Exercice 15 ($\star\star$)

Pour les deux paires de vecteurs suivantes, déterminez d'abord si l'angie est aigü ou obtus ou droit, puis calculez cet angle :

1. $u = (1,0)$ et $v = (2,2)$
2. $u = (4,1)$ et $v = (2,-8)$