Équations différentielles

Exercice 1 ($\star$)

1. Les solutions de cette équation sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{3t}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Les solutions de cette équation homogène sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-2t}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Les solutions de cette équation homogène sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{5t}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 ($\star$)

1. La fonction $t \mapsto -t^3$ est une primitive de $t \mapsto -3t^2$ sur $\mathbb{R}$, donc les solutions de cette équation homogène sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{t^3}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2}t^2$ est une primitive de $t \mapsto t$ sur $\mathbb{R}$, donc les solutions de cette équation homogène sont les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{2}t^2}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 ($\star$)

L'unique solution de ce problème de Cauchy vaut :

$$y : t \in \mathbb{R} \longmapsto 5e^{-2t}.$$

Exercice 4 ($\star\star$)

L'unique solution de ce problème de Cauchy vaut :

$$y : t \in \mathbb{R} \longmapsto -6e^{-x/2} + 3.$$

Exercice 5 ($\star\star$)

L'unique solution de ce problème de Cauchy vaut :

$$y : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{2t}(1 - e^t).$$

Exercice 6 ($\star\star$)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \neq 0$, donc l'équation de l'énoncé équivaut à

$$(E_3) \qquad y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}.$$

L'équation différentielle homogène associée est $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = 0$. $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$, donc les solutions de cette équation homogène sont les fonctions $\begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\ln(1+x^2)} \end{array}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est à dire les fonction $\begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\lambda}{1+x^2} \end{array}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On va rechercher une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante. On note $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et on pose $f : x \mapsto \dfrac{g(x)}{1+x^2}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{g'(x)(1+x^2) - 2xg(x)}{(1+x^2)^2}.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E_3) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + \frac{2x}{1+x^2} f(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \frac{g'(x)(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 1 \end{aligned}$$

$x \mapsto x$ est une primitive de $x \mapsto 1$ sur $\mathbb{R}$, donc
$f_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+x^2} \end{array}$ est une solution particulière de (E_3).
L'ensemble des solutions de (E_3) est donc

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\lambda + x}{1+x^2} \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 7 $(\star\star\star)$

Les solutions sont de la forme :

$$y : x \in]0, +\infty[\longmapsto \frac{1}{x}(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + \lambda) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8 $(\star\star\star)$

Le problème de Cauchy possède une unique solution valant :

$$y : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x) + \mathrm{e}^{-x}).$$

Exercice 9 $(\star\star\star)$

Le taux de croissance instantané de f par rapport à x se définit par : $\tau = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ où $f(x)$ est strictement positive.

Ainsi : $\tau = a] \Leftrightarrow \left[\dfrac{f'(x)}{f(x)} = a\right] \Leftrightarrow f'(x) - af(x) = 0$ Comme $x \mapsto ax$ est une primitive de $x \mapsto a$, la solution générale de l'équation linéaire sans second membre $f'(x) - af(x) = 0$ est définie par $f(x) = k\mathrm{e}^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$. Réciproquement, $f(x) = k\mathrm{e}^{ax}$ ne convient que pour $k > 0$, car alors et alors seulement, c' est une fonction strictement positive pour laquelle :

$$\tau = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{ka\mathrm{e}^{ax}}{k\mathrm{e}^{ax}} = a$$

Exercice 10 $(\star)$

1. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 5r + 6 = 0$, dont les racines réelles sont 2 et 3.
   L'ensemble des solutions à valeurs réelles de $y'' - 5y' + 6y = 0$ est donc
   $$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\mathrm{e}^{2x} + \mu\mathrm{e}^{3x} \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
2. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r = 0$, dont les racines réelles sont 0 et 3.
   L'ensemble des solutions à valeurs réelles de $y'' - 3y' = 0$ est donc
   $$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda + \mu\mathrm{e}^{3x} \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
3. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 4r + 4 = 0$, qui a une unique racine double réelle -2.
   L'ensemble des solutions à valeurs réelles de $y'' + 4y' + 4y = 0$ est donc
   $$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\lambda + \mu x)\mathrm{e}^{-2x} \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

4. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 2 = 0$, qui n'a pas de racines réelles. Posons $\alpha = \dfrac{2}{2} = 1$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{4}}{2} = 1$.

   L'ensemble des solutions à valeurs réelles de $y'' - 2y' + 2y = 0$ est donc

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)) \end{array} \mid (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 11 (⋆⋆)

On note $(E_1) : y'' + 2y' - 8y = \mathrm{e}^{3t}$. L'équation homogène associée est $(E_{1,h}) : y'' + 2y' - 8y = 0$
L'équation caractéristique associée à $(E_{1,h})$ est $r^2 + 2r - 8 = 0$, dont les racines réelles sont -4 et 2.
L'ensemble des solutions à valeurs réelles de $(E_{1,h})$ est donc

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\mathrm{e}^{2t} + \mu\mathrm{e}^{-4t} \end{array} \mid (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \right\}$$

Pour rechercher une solution particulière, on remarque que 3 n'est pas solution de l'équation caractéristique. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On pose $f_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \alpha\mathrm{e}^{3t} \end{array}$. Alors f_α est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f_\alpha \text{ solution de } (E_1) &\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\quad 9\alpha\mathrm{e}^{3t} + 2\cdot 3\alpha\mathrm{e}^{3t} - 8\alpha\mathrm{e}^{3t} = \mathrm{e}^{3t} \\ &\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\quad 9\alpha + 6\alpha - 8\alpha = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\quad \alpha = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Ainsi, $f_{\frac{1}{7}}$ est une solution particulière de (E_1). L'ensemble des solutions de (E_1) est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\mathrm{e}^{2t} + \mu\mathrm{e}^{-4t} + \dfrac{1}{7}\mathrm{e}^{3t} \end{array} \mid (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 12 (⋆⋆)

On note $(E_2) : y'' - 3y' + 4y = 2\,\mathrm{e}^{4t}$. L'équation homogène associée est $(E_{2,h}) : y'' - 3y' + 4y = 0$
L'équation caractéristique associée à $(E_{2,h})$ est $r^2 - 3r + 4 = 0$, dont les racines réelles sont -1 et 4.
L'ensemble des solutions à valeurs réelles de $(E_{2,h})$ est donc

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\mathrm{e}^{-t} + \mu\mathrm{e}^{4t} \end{array} \mid (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \right\}$$

Pour rechercher une solution particulière, on remarque que 4 est solution simple de l'équation caractéristique. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On pose $f_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \alpha t\mathrm{e}^{4t} \end{array}$. Alors f_α est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$f'_\alpha(t) = \alpha(4t+1)\mathrm{e}^{4t}$$

$$f''_\alpha(t) = \alpha(16t+8)\mathrm{e}^{4t}$$

$$\begin{aligned} f_\alpha \text{ solution de } (E_2) &\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\quad \alpha(16t+8)\mathrm{e}^{4t} - 3\alpha(4t+1)\mathrm{e}^{4t} + 4\alpha t\mathrm{e}^{4t} = 2\,\mathrm{e}^{4t} \\ &\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\quad \alpha(16t+8) - 3\alpha(4t+1) + 4\alpha t = 2 \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Ainsi, $f_{\frac{2}{5}}$ est une solution particulière de (E_2). L'ensemble des solutions de (E_2) est

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\mathrm{e}^{-t} + (\mu + \dfrac{2}{5}t)\mathrm{e}^{4t} \end{array} \mid (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 13 (⋆⋆⋆)

On commence par résoudre l'équation homogène $y'' - 2y' + y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$, dont 1 est racine double. Les solutions générales de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$x \mapsto \lambda \mathrm{e}^x + \mu x \mathrm{e}^x.$$

Comme 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on va chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1 . Mais $y(x) = ax + b$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -2a + ax + b = x \iff \forall x \in \mathbb{R}, (a-1)x + (b-2a) = 0.$$

Un polynôme réel étant identiquement nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, on en déduit que $a = 1$ et $b = 2$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda \mathrm{e}^x + \mu x \mathrm{e}^x + (x+2).$$

Si on ajoute les conditions $y(0) = y'(0) = 0$, on obtient les équations

$$\lambda + 2 = 0 \text{ et } \lambda + \mu + 1 = 0,$$

soit $\lambda = -2$ et $\mu = 1$. La seule solution de l'équation est donc la fonction

$$x \mapsto (x-2)\mathrm{e}^x + (x+2).$$

Exercice 14 $(\star\star\star)$

L'équation homogène $y'' + 9y = 0$ admet pour équation caractéristique associée $r^2 + 9 = 0$. Son discriminant est négatif. Posons $\alpha = 0$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{36}}{2} = 3$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \cos(3x)$ et $t \mapsto \sin(3x)$. On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1 , et on trouve $x \mapsto \dfrac{x+1}{9}$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto A\cos(3x) + B\sin(3x) + \frac{x+1}{9}.$$

La condition $y(0) = 0$ entraîne $A = -1/9$. Et la condition $y'(0) = 1$ entraîne $B = \dfrac{8}{27}$.

Exercice 15 $(\star\star\star)$

Non corrigé

Exercice 16 $(\star\star\star)$

1. La mesure relative d'aversion au risque étant supposée constante, il existe $b \in \mathbb{R}$ telle que $\nu(x) = b$ soit

   $$-\frac{u''(x)x}{u(x)} = b.$$

   Cette équation différentielle se réécrit pour $x \neq 0$:

   $$u''(x) + \frac{b}{x}u(x) = 0.$$

   Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont les coefficients ne sont pas constants. On ne sait pas la résoudre directement.
2. Posons $v(x) = u'(x)$ alors $v'(x) = u''(x)$ et l'équation différentielle s'écrit :

   $$v'(x) + \frac{b}{x}v(x) = 0.$$

3. L'équation (E1) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
   La fonction $x \mapsto -b\ln(x)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto -\dfrac{b}{x}$. Ainsi les solutions de (E1) sont de la forme :

   $$x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-b\ln(x)} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Or $\mathrm{e}^{-b\ln(x)} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{b\ln(x)}} = \dfrac{1}{x^b} = x^{-b}$. Ainsi les solutions de (E1) sont de la forme :

   $$x \mapsto \lambda x^{-b} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. Comme $u'(x) = v(x)$, il nous faut calculer une primitive de la fonction v. On a deux cas selon si $b = 1$ ou $b \neq 1$.

   Si $b = 1$, $u(x) = \mu + \lambda \ln(x)$ avec λ et μ des constantes.

   Si $b \neq 1$, $u(x) = \mu + \dfrac{\lambda}{1-b} x^{1-b}$ avec λ et μ des constantes.