Équations différentielles

Équadiffs linéaires d'ordre 1

Exercice 1 ($\star$)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'(t) - 3y(t) = 0$
2. $y'(t) + 2y(t) = 0$
3. $y'(t) - 5y(t) = 0$

Exercice 2 ($\star$)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'(t) - 3t^2y(t) = 0$
2. $y'(t) + ty(t) = 0$

Exercice 3 ($\star$)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = -2y(t) \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

Exercice 4 ($\star\star$)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} 2y'(t) + y(t) = 3 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

Exercice 5 ($\star\star$)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) - 3y(t) = \mathrm{e}^{2t} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 6 ($\star\star$)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(1 + x^2)y'(x) + 2xy(x) = 1.$$

Exercice 7 ($\star\star\star$)

Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = \mathrm{e}^x.$$

Exercice 8 ($\star\star\star$)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = \cos(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Exercice 9 ($\star\star\star$)

Soit a un nombre strictement positif donné.
Trouver toutes les fonctions dérivables strictement positives $x \mapsto f(x)$ pour lesquelles le taux de croissance instantané de f par rapport à x est égal à a.

Équadiffs linéaires d'ordre 2 à coef. constants

Exercice 10 ($\star$)

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 0$
2. $y''(t) - 3y'(t) = 0$
3. $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0$
4. $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 0$

Exercice 11 ($\star\star$)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$y'' + 2y' - 8y = 0.$$
2. On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$y'' + 2y' - 8y = \mathrm{e}^{3t} \quad \text{(E)}$$
   (a) Déterminer une solution particulière de (E) de la forme $t \mapsto \alpha\mathrm{e}^{3t}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (b) Conclure.

Exercice 12 ($\star\star$)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$y'' - 3y' - 4y = 0.$$
2. On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$y'' - 3y' - 4y = 2\,\mathrm{e}^{4t} \quad \text{(E)}$$
   (a) Déterminer une solution particulière de (E) de la forme $t \mapsto \alpha t\mathrm{e}^{4t}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (b) Conclure.

Exercice 13 ($\star\star\star$)

Le but de cet exercice est de résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à ce problème de Cauchy.
2. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = x$ de la forme $y : x \mapsto ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
3. Résoudre le problème de Cauchy.

Exercice 14 ($\star\star\star$)

Le but de cet exercice est de résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' + 9y = x + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}.$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à ce problème de Cauchy.
2. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + 9y = x + 1$ de la forme $y : x \mapsto ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
3. Résoudre le problème de Cauchy.

Autre type d'équadiffs d'ordre 1

Exercice 15 ($\star\star\star$)

Résoudre l'équation à variables séparées :

$$y'(x) = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-y(x)}$$

Exercice 16 ($\star\star\star$)

Soit $x \mapsto u(x)$ une fonction d'utilité pour un niveau de richesse $x > 0$.
La mesure relative d'aversion face au risque d'Arrow-Pratt, pour un niveau de richesse x, est donné par l'expression :

$$\nu(x) = -\frac{u''(x)x}{u'(x)}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer une fonction d'utilité u telle que la mesure relative d'aversion face au risque soit constante.

1. Soit u une fonction d'utilité telle que la mesure relative d'aversion face au risque soit constante. Montrer que u vérifie une équation différentielle d'ordre 2 notée (E).
2. Posons $v(x) = u'(x)$, montrer que l'équation différentielle précédente s'écrit :

$$v'(x) = -\frac{vb}{x} \quad \text{où } b \in \mathbb{R} \quad \text{(E1)}.$$

3. Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation (E1).
4. En déduire dans $]0, +\infty[$ les solutions de (E).