Variables aléatoires continues

Exercice 1 ($\star$)

1. La fonction f vérifie les trois points de la définition d'une densité de probabilité :
   - f est continue partout sauf en 1
   - on a $f(x) = 2x$ si $x \in [0;1]$ ou $f(x) = 0$. Dans les deux cas, $f(x) \geqslant 0$.
   - enfin, on a :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x}_{\text{converge et vaut 0}} + \int_0^1 2x\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_1^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x}_{\text{converge et vaut 0}} = \Big[x^2\Big]_0^1 = 1$$

   Donc, f est bien une densité de probabilité.
2. On distingue trois cas :
   - si $x < 0$, alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$;
   - si $x \in [0:1]$, alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^x 2t\,\mathrm{d}t = \Big[t^2\Big]_0^x = x^2$.
   - si $x \geqslant 1$, alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^1 2t\,\mathrm{d}t + \int_1^x 0\,\mathrm{d}t = 1$.

   En résumé, on a :
   $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$
3. On a :
   $$P(X \leq \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$
   $$P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}) = F(\frac{3}{4}) - F(\frac{1}{4}) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$
   $$P(X > \frac{9}{10}) = 1 - F(\frac{9}{10}) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 1 - \frac{81}{100} = \frac{19}{100}$$

Exercice 2 ($\star$)

1. La fonction f vérifie les trois points de la définition d'une densité de probabilité :
   - f est continue partout sauf en 1
   - on a $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ si $x > 1$ ou $f(x) = 0$. Dans les deux cas, $f(x) \geqslant 0$.
   - il reste à montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1. On a :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x}_{\text{converge et vaut 0}} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

     Or,
   $$\int_1^M \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^M = 1 - \frac{1}{M}$$

     Et $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} 1 - \frac{1}{M} = 1$. Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty} +\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut bien 1.

   Donc, f est bien une densité de probabilité.

2. On a :

$$P(X \leqslant 0) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x = 0$$

$$P(X \leqslant 1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x = 0$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - 0 = 1$$

$$P(X \leq 2) = \int_{-\infty}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(X \leq 3) = \int_{-\infty}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(X \in]2;3[) = P(X \in]2;3]) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Exercice 3 ($\star\star$)

1. D'après le cours, on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ x - 1 & \text{si} \quad x \in [1;2] \\ 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

2. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a :

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(3X \leq y) = P(X \leq \frac{y}{3}) = F_X\left(\frac{y}{3}\right)$$

3. On a donc :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \frac{y}{3} < 1 \\ \frac{y}{3} - 1 & \text{si} \quad \frac{y}{3} \in [1;2] \\ 1 & \text{si} \quad \frac{y}{3} > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < 3 \\ \dfrac{y-3}{3} & \text{si} \quad y \in [3;6] \\ 1 & \text{si} \quad y > 6 \end{cases}$$

4. On reconnait la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[3;6]$ donc $Y \sim \mathcal{U}([3;6])$.

Exercice 4 ($\star\star$)

1. D'après le cours, on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

2. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a :

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\frac{1}{2}X \leq y) = P(X \leq 2y) = F_X(2y)$$

3. On a donc :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-2y} & \text{si} \quad 2y \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad 2y < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-2y} & \text{si} \quad y \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y < 0 \end{cases}$$

4. On reconnait la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 2 donc $Y \sim \mathcal{E}(2)$.

5. On a :
$$P(Y \leq 3) = F_Y(3) = 1 - e^{-6}$$
Par ailleurs, d'après la formule des probabilités conditionnelles,
$$P_{[Y\leq 3]}(Y > 1) = \frac{P(1 < Y \leq 3)}{P(Y \leq 3)}$$
Or,
$$P(1 < Y \leq 3) = F_Y(3) - F_Y(1) = 1 - e^{-6} - (1 - e^{-2}) = e^{-2} - e^{-6}$$
Et donc,
$$P_{[Y\leq 3]}(Y > 1) = \frac{e^{-2} - e^{-6}}{1 - e^{-6}}$$

Exercice 5 $(\star\star)$

1. La fonction f vérifie les trois points de la définition d'une densité de probabilité :
   - f est continue sur $\mathbb{R}$
   - on a $f(t) = \dfrac{3}{4}t(2-t)$ si $t \in [0;2]$ ou $f(t) = 0$. Dans les deux cas, $f(t) \geqslant 0$.
   - il reste à montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1. On a :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t}_{\text{converge et vaut 0}} + \int_0^2 \frac{3}{4}t(2-t)\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_{2}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t}_{\text{converge et vaut 0}} \\ &= \int_0^2 \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}t^2\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{4}t^3\right]_0^2 \\ &= 3 - 2 = 1\end{aligned}$$

   Donc, f est bien une densité de probabilité.

2. Il nous faut calculer $P(\frac{1}{2} \leq T \leq \frac{3}{4})$. On a :

$$\begin{aligned}P(\frac{1}{2} \leq T \leq \frac{3}{4}) &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{4}t^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{3}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^3 - \left(\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\right) \\ &= \frac{41}{256}\end{aligned}$$

Exercice 6 $(\star)$

1. La durée moyenne de fonctionnement entre la mise en route de la machine et la première panne est :
$$E(X_1) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$
   Puisque X_2 et X_3 suivent la même loi que X_1, la durée moyenne de fonctionnement entre la première et la seconde panne, est la même qu'entre la seconde et la troisième panne, et vaut donc 2 heures.

2. On a :
$$P(E \geq 2) = P([X_1 \geq 2] \cap [X_2 \geq 2] \cap [X_3 \geq 2]) = P(X_1 \geq 2)^3 = (1 - F_{X_1}(2))^3$$
   puisque X_1, X_2 et X_3 suivent toutes la même loi et sont mutuellement indépendantes. Ainsi,
$$P(E \geq 2) = \left(1 - (1 - e^{-\frac{1}{2}\times 2})\right)^3 = e^{-3}$$

Exercice 7 ($\star$)

1. Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors, d'après le tableau :

$$P(X<0)=\Phi(0)=0,5$$
$$P(X>3)=1-\Phi(3)=1-0,9987=0,0013$$
$$\begin{aligned}P(-1,96<X<1,96)&=\Phi(1,96)-\Phi(-1,96)\\&=\Phi(1,96)-(1-\Phi(1,96))\\&=2\phi(1,96)-1\\&=2\times 0,9750-1\\&=0,95\end{aligned}$$

2. Si $X \sim \mathcal{N}(-3,1)$ alors $\dfrac{X+3}{\sqrt{1}}=X+3\sim\mathcal{N}(0,1)$. Donc, d'après le tableau :

$$P(X<-1)=P(X+3<-1+3)=P(X+3<2)=\Phi(2)=0,9772$$
$$P(X>-5)=P(X+3>-5+3)=P(X+3>-2)=1-\Phi(-2)=1-(1-\Phi(2))=\Phi(2)=0,9772$$
$$\begin{aligned}P(-5<X<-1)&=P(-2<X+3<2)\\&=\Phi(2)-\Phi(-2)\\&=\Phi(2)-(1-\Phi(2))\\&=2\Phi(2)-1\\&=2\times 0,9772-1\\&=0,9544\end{aligned}$$

3. Si $X \sim \mathcal{N}(8,4)$ alors $\dfrac{X-8}{2}\sim\mathcal{N}(0,1)$. Donc, d'après le tableau :

$$\begin{aligned}P(X<7,5)&=P\left(\frac{X-8}{2}<\frac{7,5-8}{2}\right)\\&=P\left(\frac{X-8}{2}<-0,25\right)\\&=\Phi(-0,25)\\&=1-\Phi(0,25)\\&=1-0,5987\\&=0,4013\end{aligned}$$
$$P(X>8,5)=PP\left(\frac{X-8}{2}>\frac{8,5-8}{2}\right)=P\left(\frac{X-8}{2}>0,25\right)=1-\Phi(0,25)=0,4013$$
$$\begin{aligned}P(6,5<X<10)&=P\left(\frac{6,5-8}{2}<\frac{X-8}{2}<\frac{10-8}{2}\right)\\&=P\left(-0,75<\frac{X-8}{2}<1\right)\\&=\Phi(1)-\Phi(-0,75)\\&=\Phi(1)-(1-\Phi(0,75))\\&=0,8413-(1-0,7734)=0,6147\end{aligned}$$

Exercice 8 ($\star$)

Notons X la variable aléatoire correspondant aux commandes quotidiennes en antalgiques. Alors, $\dfrac{X-250}{20}\sim\mathcal{N}(0,1)$. Donc,

$$P(X>300)=P\left(\frac{X-250}{20}>\frac{300-250}{20}\right)=P\left(\frac{X-250}{20}>2,5\right)=1-\Phi(2,5)=1-0,9938=0,0062$$

La probabilité qu'il y ait rupture de stock est donc de $0,0062$.

Exercice 9 ($\star\star$)

1. On a :
$$P(0 \leq X \leq 2,57) = \Phi(2,57) - \Phi(0) = 0,9949 - 0,5 = 0,4949$$
et
$$P(-2,57 \leq X \leq 2,57) = \Phi(2,57) - \Phi(-2,57) = \Phi(2,57) - (1 - \Phi(2,57)) = 2\Phi(2,57) - 1 = 2 \times 0,9949 - 1 = 0,9898$$
2. On chercher β tel que $\Phi(\beta) = 0,99$ or $\Phi(2,33) = 0,9901$ donc on en déduit que $\beta = 2,33$.
3. On chercher β tel que $\Phi(\beta) = 0,95$ or $\Phi(1,64) = 0,9495$ et $\Phi(1,65) = 0,9505$.
On en déduit que $\beta = \dfrac{1,64 + 1,65}{2} = 1,645$.
4. On cherche β tel que $P(-\beta \leq X \leq \beta) = 0,98$ or
$$P(-\beta \leq X \leq \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(-\beta) = 2\Phi(\beta) - 1.$$
On cherche donc β tel que :
$$2\Phi(\beta) - 1 = 0,98 \text{ soit } \Phi(\beta) = 0,99$$
Or $\Phi(2,33) = 0,9901$ donc on en déduit que $\beta = 2,33$.
5. On cherche β tel que $P(-\beta \leq X \leq \beta) = 0,97$ or
$$P(-\beta \leq X \leq \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(-\beta) = 2\Phi(\beta) - 1.$$
On cherche donc β tel que :
$$2\Phi(\beta) - 1 = 0,97 \text{ soit } \Phi(\beta) = 0,985$$
Or $\Phi(2,17) = 0,985$ donc on en déduit que $\beta = 2,17$.

Exercice 10 ($\star\star\star$)

1. Soit X la variable aléatoire au nombre de passagers présents dans l'avion. D'après les données de l'énoncé, X suit une loi normale vérifiant :
$$E(X) = 0,8 \times 272 = 217,6$$
et
$$\sigma(X) = 13,6.$$
Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{N}(217.6, 13.6^2)$.
2. Le nombre de places libres vaut $272 - X$, on cherche donc $P(272 - X \leq 20)$. On a alors :
$$P(272 - X \leq 20) = P(X \geq 252).$$
Pour calculer cela, on va se ramener à une loi centrée réduite pour utiliser les tables de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On :
$$P(X \geq 252) = P\left(\frac{X - 217,6}{13,6} \geq \frac{252 - 217,6}{13,6}\right) \simeq P(X^* \geq 2,53) = \Phi(2,53) = 1 - 0,9943 = 0,0057$$
Ainsi la probabilité qu'il y ait au plus 20 places libres est de 0,0057.
3. Comme la compagnie décide de vendre 300 places, les paramètres de la loi normale vont changer, on a alors :
$$E(X) = 0,8 \times 300 = 240$$
et
$$\sigma(X) = 15.$$
Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{N}(240, 15^2)$.
Calculer la probabilité qu'un voyageur ne puisse pas rentrer dans l'avion revient à calculer $P(X > 272)$. On a :
$$P(X > 272) = 1 - P(X \leq 272) = 1 - P\left(\frac{X - 240}{15} \leq \frac{272 - 240}{15}\right) = 1 - P(X^* \leq 2,13 = 1 - \Phi(2,13) = 1 - 0,9834 = 0,0166$$
Ainsi la probabilité qu'un passager ne puisse pas entrer dans l'avion est de 0,0166.

4. Notons α le nombre de billets vendus par la compagnie, les paramètres de la loi normale sont alors :

$$E(X) = 0,8\alpha$$

et

$$\sigma(X) = 0,05\alpha$$

On cherche α tel que $P(X > 272) = 0,01$. On a :

$$P(X > 272) = 0,01 \iff P\left(\frac{X - 0,8\alpha}{0,05\alpha} > \frac{272 - 0,8\alpha}{0,05\alpha}\right) = 0,01 \iff P(X^* > u_\alpha) = 0,01$$

avec $u_\alpha = \dfrac{272 - 0,8\alpha}{0,05\alpha}$ et $X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Or, on a :

$$P(X^* > u_\alpha) = 0,01 \iff 1 - \Phi(u_\alpha) = 0,01 \iff \Phi(u_\alpha) = 0,99$$

Or $\Phi(2,33) = 0,9901$, on en déduit que $u_\alpha = 2,33$. Il nous reste plus qu'à trouver α tel que :

$$u_\alpha = 2,33 \quad \text{i.e.} \quad \frac{272 - 0,8\alpha}{0,05\alpha} = 2,33$$

On résout :

$$\frac{272 - 0,8\alpha}{0,05\alpha} = 2,33 \iff 272 - 0,8\alpha = 2,33 \times 0,05\alpha \iff (0,8 + 0,1165)\alpha = 272 \iff \alpha \simeq 296,8$$

La compagnie devra donc vendre au maximum 297 billets pour la probabilité que certains voyageurs ne puissent pas monter dans l'avion soit d'un vol sur 100.

Exercice 11 ($\star\star\star$)

Notons X la variable aléatoire égale à la durée d'une nuit de sommeil.

1. On cherche $P(X > 8)$. Or $X \hookrightarrow \mathcal{N}(6.8, 0.6^2)$ donc pour calculer cette probabilité, on va se ramener à la loi normale centrée réduite. On a :

$$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - P\left(\frac{X - 6.8}{0.6} \leq \frac{8 - 6.8}{0.6}\right) = 1 - P(X^* \leq 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

2. On cherche $P(X \leq 6)$. Or $X \hookrightarrow \mathcal{N}(6.8, 0.6^2)$ donc pour calculer cette probabilité, on va se ramener à la loi normale centrée réduite. On a :

$$P(X \leq 6) = P(X \leq 6) = P\left(\frac{6 - 6.8}{0.6} \leq \frac{6 - 6.8}{0.6}\right) \simeq P(X^* \leq -1,33) = \Phi(-1,33) = 1 - \Phi(1,33) = 1 - 0,9082 = 0,0918$$

3. On cherche $P(7 \leq X \leq 9)$. . Or $X \hookrightarrow \mathcal{N}(6.8, 0.6^2)$ donc pour calculer cette probabilité, on va se ramener à la loi normale centrée réduite. On a :

$$P(7 \leq X \leq 9) = P\left(\frac{7 - 6,8}{0,6} \leq X^* \leq \frac{9 - 6,8}{0,6}\right) \simeq P(0,33 \leq X^* \leq 3,67) = \Phi(3,67) - \Phi(0,33) = 0,9999 - 0,6293 = 0,3706$$

Ainsi 37% de la population dort entre 7 et 9 heures par nuit.

4. On cherche β tel que $P(X > \beta) = 0,05$. Ramenons-nous à une loi normale centrée réduite, on a :

$$P(X > \beta) = 0,05 \iff P\left(X^* > \frac{\beta - 6,8}{0,6}\right) = 0,05 \iff 1 - \Phi\left(\frac{\beta - 6,8}{0,6}\right) = 0,05 \iff \Phi\left(\frac{\beta - 6,8}{0,6}\right) = 0,95$$

On obtient $\dfrac{\beta - 6,8}{0,6} = \dfrac{1,64 + 1,65}{2} = 1,645$. Ainsi on a :

$$\beta = 1,645 * 0,6 + 6,8 = 7,787$$

Il faudra donc dormir au moins 7,8 heures pour faire partie des 5% de la population qui dort le plus.