Variables aléatoires continues

Exercice 1 ($\star$)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X dont f est la densité.
3. Calculer $P\left(X \leq \frac{1}{2}\right)$, $P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}\right)$ et $P\left(X > \frac{9}{10}\right)$.

Exercice 2 ($\star$)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1, \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$

1. Justifier que f est une densité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer

(a) $P(X \leq 0)$,
(b) $P(X \leq 1)$,
(c) $P(X > 1)$,
(d) $P(X \leq 2)$,
(e) $P(X \leq 3)$,
(f) $P\Big(X \in \,]2,3[\Big)$.

Exercice 3 ($\star\star$)

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[1,2]$. On note Y la variable aléatoire définie par $Y = 3X$. Le but de cet exercice est de déterminer la loi de Y.
On note F_X la fonction de répartition de X et F_Y la fonction de répartition de Y.

1. Déterminer pour tout réel x, l'expression de $F_X(x)$.
2. Justifier que pour tout réel y, $\quad F_Y(y) = F_X\left(\frac{y}{3}\right)$.
3. En déduire pour tout réel y, l'expression de $F_Y(y)$.
4. En déduire la loi de Y.

Exercice 4 ($\star\star$)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1. On note Y la variable aléatoire définie par $Y = \frac{1}{2}X$. Le but de cet exercice est de déterminer la loi de Y.
On note F_X la fonction de répartition de X et F_Y la fonction de répartition de F_Y.

1. Déterminer pour tout réel x, l'expression de $F_X(x)$.
2. Justifier que pour tout réel y, $\quad F_Y(y) = F_X(2y)$.
3. En déduire pour tout réel y, l'expression de $F_Y(y)$ en distinguant les cas $y < 0$ et $y \geq 0$.
4. En déduire la loi de Y.
5. Déterminer $P(Y \leq 3)$ et $P_{[Y \leq 3]}(Y > 1)$.

Exercice 5 ($\star\star$)

La nuit, dans la savane, un lion se rend à la rivière pour boire et y reste un quart d'heure. Après de nombreuses observations, on estime que l'instant d'arrivée T du lion à la rivière se situe entre 0h (minuit) et 2h du matin. La variable aléatoire T, exprimée en heures, est une variable aléatoire dont une densité de probabilité est la fonction f définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \dfrac{3}{4}t(2-t) & \text{si } 0 \leq t \leq 2, \\ 0 & \text{si } t > 2. \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Un observateur se présente à la rivière à 0h30 et y reste un quart d'heure.
   Quelle est la probabilité pour qu'il aperçoive le lion ?

Exercice 6 ($\star$)

Le fonctionnement d'une machine est perturbé par des pannes. On considère les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 définies par

- X_1 est le temps, exprimé en heures, écoulé entre la mise en route de la machine et la première panne,
- X_2 est le temps, exprimé en heures, écoulé entre la remise en route de la machine après la première panne et la panne suivante,
- X_3 est le temps, exprimé en heures, écoulé entre la remise en route de la machine après la seconde panne et la panne suivante.

Après la troisième panne, l'utilisation de la machine est suspendue. On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont mutuellement indépendantes et suivent toutes les trois une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

1. Quelle est la durée moyenne de fonctionnement de la machine entre la mise en route de la machine et la première panne ? Entre la mise en route de la machine après la première panne et la seconde panne ? Entre la mise en route de la machine après la seconde panne et la troisième panne ?
2. Déterminer la probabilité de l'évènement E : "chacune des trois périodes de fonctionnement de la machine dure plus de 2 heures".

Exercice 7 ($\star$)

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.
   (a) Calculer $P(X < 0)$.
   (b) Calculer $P(X > 3)$.
   (c) Calculer $P(-1.96 < X < 1.96)$.
2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(-3,1)$.
   (a) Calculer $P(X < -1)$.
   (b) Calculer $P(X > -5)$.
   (c) Calculer $P(-5 < X < -1)$.

3. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(8, 4)$.
   (a) Calculer $P(X < 7.5)$.
   (b) Calculer $P(X > 8.5)$.
   (c) Calculer $P(6.5 < X < 10)$.

Exercice 8 $(\star)$

La variable aléatoire qui correspond aux commandes quotidiennes en antalgiques (aspirine, ibuprofène, etc.) suit une loi normale d'espérance 250 et d'écart-type 20. Le stock disponible en début de matinée est de 300 antalgiques. Quelle est la probabilité qu'il y ait rupture de stock ?

Exercice 9 $(\star\star)$

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. À l'aide de la table de valeurs de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite, déterminer :

1. $P(0 \leq X \leq 2,57)$ et $P(-2,57 \leq X \leq 2,57)$.
2. la valeur $\beta > 0$ telle que $P(X \leq \beta) = 1 - \alpha$ avec $\alpha = 0,01$.
3. la valeur $\beta > 0$ telle que $P(X \leq \beta) = 1 - \alpha$ avec $\alpha = 0,05$.
4. la valeur $\beta > 0$ telle que $P(-\beta \leq X \leq \beta) = 1 - \alpha$ avec $\alpha = 0,02$.
5. la valeur $\beta > 0$ telle que $P(-\beta \leq X \leq \beta) = 1 - \alpha$ avec $\alpha = 0,03$.

Exercice 10 $(\star\star\star)$

Suite à une étude statistique sur le remplissage de ses vols, une compagnie aérienne a calculé qu'en moyenne, le nombre de ses passagers présents par rapport au nombre de billets vendus était de 80% avec un écart-type de 5%. Elle décide de modéliser le nombre de passagers présents sur le prochain vol par une loi normale.

1. Pour un vol de 272 places, si elle vend exactement 272 billets, quelles sont les caractéristiques de la loi normale qui décrit le nombre de passagers présents (espérance, écart-type) ?
2. Dans ce cas, quelle est la probabilité qu'il reste au plus 20 places libres ?
3. La compagnie décide maintenant de vendre 300 billets. Quelle est la probabilité qu'un voyageur ne puisse pas rentrer dans l'avion ?
4. Quel est le nombre maximum de billets que la compagnie aérienne doit vendre si elle accepte que certains voyageurs ne puissent pas monter dans l'avion dans un vol sur 100 ?

Exercice 11 $(\star\star\star)$

Selon la fondation du sommeil, la durée moyenne d'une nuit de sommeil est de 6,8 heures. Supposons que l'écart-type soit de 0,6 heure et que la distribution de probabilité soit normale.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne sélectionnée aléatoirement dorme plus de 8 heures ?
2. Quelle est la probabilité qu'une personne sélectionnée aléatoirement dorme au plus 6 heures ?
3. Les médecins recommandent de dormir entre 7 et 9 heures par nuit. Quel pourcentage de la population respecte cette recommandation ?
4. Au moins combien d'heures dormez-vous par nuit, si vous faites parti des 5% de la population dormant le plus ?