Intégrales généralisées

Exercice 1 (⋆⋆)

1. Une primitive de f_1 est donnée par :
$$F_1(x) = \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 7x$$

2. Une primitive de f_2 est donnée par :
$$F_2(x) = -3\ln(x)$$

3. On a $f_3(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2} = \dfrac{x^4}{x^2} + \dfrac{1}{x^2} = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$. Donc, une primitive de f_3 est donnée par :
$$F_3(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}$$

4. Une primitive de f_4 est donnée par :
$$F_4(x) = -\frac{1}{2x^2}$$

5. La fonction f_5 semble être de la forme $u'u^n$ avec $u(x) = 7x+1$ et $n = 8$. On a $u'(x) = 7$ donc
$$u'(x)u(x)^n = 7 \times (7x+1)^8 = 7f_5(x)$$
Une primitive de f_5 est donc donnée par :
$$F_5(x) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{8+1}(5x+1)^{7+1} = \frac{(7x+1)^9}{63}$$

6. La fonction f_6 semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^n}$ avec $u(x) = x^2+x+1$ et $n = 4$. On a $u'(x) = 2x+1$ donc
$$\frac{u'(x)}{u(x)^n} = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^4} = f_6(x)$$
Une primitive de f_6 est donc donnée par :
$$F_6(x) = \frac{-1}{(4-1)(x^2+x+1)^{4-1}} = \frac{-1}{3(x^2+x+1)^3}$$

7. La fonction f_7 semble être de la forme $u'u^n$ avec $u(x) = \ln(x)$ et $n = 2$. On a $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ donc :
$$u'(x)u(x)^n = \frac{1}{x}(\ln(x))^2 = f_7(x)$$
Une primitive de f_7 est donc donnée par :
$$F_7(x) = \frac{(\ln(x))^3}{3}$$

8. La fonction f_8 semble être de la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^3+1$. On a $u'(x) = 3x^2$ donc :
$$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} = \frac{3}{2}f_8(x)$$
Une primitive de f_8 est donc donnée par :
$$F_8(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}$$

9. La fonction f_9 semble être de la forme $u'\mathrm{e}$ avec $u(x) = x^2 + 2x$. On a $u'(x) = 2x + 2$ donc :

$$u'\mathrm{e}^u = (2x+2)\mathrm{e}^{x^2+2x} = 2(x+1)\mathrm{e}^{x^2+2x} = 2f_9(x)$$

Une primitive de f_9 est donc donnée par :

$$F_9(x) = \frac{1}{9}\mathrm{e}^{x^2+2x}.$$

Exercice 2 $(\star\star)$

1. Commençons par déterminer une primitive de la fonction $f(x) = x^3 + x - 2$. Une primitive de f est donnée par :

$$F(x) = \frac{1}{3+1}x^{3+1} + \frac{1}{1+1}x^{1+1} - 2 \times x = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 2x.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I_1 = \int_{-2}^{3}(x^3+x-2)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-2}^{3} &= \left(\frac{1}{4}(3)^4 + \frac{1}{2}(3)^2 - 2\times 3\right) - \left(\frac{1}{4}(-2)^4 + \frac{1}{2}(-2)^2 - 2\times(-2)\right) \\ &= \frac{81}{4} + \frac{9}{2} - 6 - 4 - 2 - 4 \\ &= \frac{81+18-64}{4} \\ &= \frac{35}{4} \end{aligned}$$

2. Commençons par déterminer une primitive de la fonction $f(x) = \sqrt{2x+3}$. La fonction f semble être de la forme $u'u^\alpha$ avec $u(x) = 2x+3$ et $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Ainsi $u'(x) = 2$ et on a alors :

$$u'u^\alpha = 2(2x+3)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2x+3} = 2f(x).$$

On a $f(x) = \dfrac{1}{2}u'u^\alpha$, une primitive de f est donc donnée par :

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{2}+1}(2x+3)^{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{3}{2}}(2x+3)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I_2 = \int_{3}^{11} \sqrt{2x+2}\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_{3}^{11} \\ &= \left(\frac{1}{3}(2\times 11+3)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{1}{3}(2\times 3+3)^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{3}(25)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(9)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{3}((25)^{\frac{1}{2}})^3 - \frac{1}{3}((9)^{\frac{1}{2}})^3 \\ &= \frac{1}{3}(\sqrt{25})^3 - \frac{1}{3}(\sqrt{9})^3 \\ &= \frac{125}{3} - \frac{27}{3} \\ &= \frac{98}{3} \end{aligned}$$

3. Commençons par déterminer une primitive de la fonction $f(t) = \dfrac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}$. La fonction f semble être de la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(t) = t^5 + 3$. Ainsi $u'(t) = 5t^4$ et on a alors :

$$\frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{5t^4}{2\sqrt{t^5+3}} = \frac{5}{2}\frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}} = \frac{5}{2}f(t)$$

Ainsi $f(t) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ et une primitive de f est donnée par :

$$F(t) = \frac{2}{5}\sqrt{t^5+3}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I_3 = \int_0^1 \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}\mathrm{d}t &= \left[\frac{2}{5}\sqrt{t^5+3}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{5}\sqrt{1^5+3} - \frac{2}{5}\sqrt{0^5+3} \\ &= \frac{2}{5}\sqrt{4} - \frac{2}{5}\sqrt{3} \\ &= \frac{4-2\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

4. Commençons par déterminer une primitive de la fonction $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$. La fonction f semble être de la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u(t) = \sqrt{t}$. Ainsi $u'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ et on a alors :

$$u'\mathrm{e}^u = \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{e}^{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \times \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}f(t)$$

Ainsi $f(t) = 2u'\mathrm{e}^u$ et une primitive de f est donnée par :

$$F(t) = 2\mathrm{e}^u = 2\mathrm{e}^{\sqrt{t}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \\ &= \left[2\mathrm{e}^{\sqrt{t}}\right]_1^2 \\ &= 2\mathrm{e}^{\sqrt{2}} - 2\mathrm{e}^{\sqrt{1}} \\ &= 2\mathrm{e}^{\sqrt{2}} - 2\mathrm{e}. \end{aligned}$$

5. Commençons par déterminer une primitive de $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$. La fonction f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2-x+1$. Ainsi $u'(x) = 2x-1$ et on a alors :

$$\frac{u'}{u} = \frac{2x-1}{x^2-x+1} = f(x).$$

Une primitive de f est donc donnée par :

$$F(x) = \ln|x^2-x+1|.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x \\ &= \left[\ln|x^2-x+1|\right]_0^2 \\ &= \ln|2^2-2+1| - \ln|0^2-0+1| \\ &= \ln|3| - \ln|1| \\ &= \ln(3). \end{aligned}$$

Exercice 3 $(\star\star\star)$

1. On effectue une intégration par parties :

$$\text{on pose} \left\{ \begin{array}{rcl} u(t) & = & t \\ v'(t) & = & e^{2t} \end{array} \right. \qquad \text{on a} \left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & 1 \\ v(t) & = & \dfrac{1}{2}e^{2t} \end{array} \right.$$

Alors, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\frac{t}{2}e^{2t}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}e^{2t}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2. On effectue une intégration par parties :

$$\text{on pose} \left\{ \begin{array}{rcl} u(t) & = & \ln(t) \\ v'(t) & = & t \end{array} \right. \qquad \text{on a} \left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & \dfrac{1}{t} \\ v(t) & = & \dfrac{t^2}{2} \end{array} \right.$$

Alors, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{t} \times \frac{t^2}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\ln(2) - \int_1^2 \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\ln(2) - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^2 \\ &= 2\ln(2) - 1 + \frac{1}{4} \\ &= 2\ln(2) - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

3. On effectue une intégration par parties :

$$\text{on pose} \left\{ \begin{array}{rcl} u(x) & = & x^2+1 \\ v'(x) & = & e^{3x} \end{array} \right. \qquad \text{on a} \left\{ \begin{array}{rcl} u'(x) & = & 2x \\ v(x) & = & \dfrac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right.$$

Alors, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_3 &= \left[\frac{x^2+1}{3}e^{3x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{3}e^{3x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}e^3 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\int_0^1 xe^{3x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Puis, pour calculer $\displaystyle\int_0^1 xe^{3x}\,\mathrm{d}x$, on effectue une seconde intégration par parties :

$$\text{on pose} \left\{ \begin{array}{rcl} u(x) & = & x \\ v'(x) & = & e^{3x} \end{array} \right. \qquad \text{on a} \left\{ \begin{array}{rcl} u'(x) & = & 1 \\ v(x) & = & \dfrac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right.$$

Alors, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{3x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x}{3}e^{3x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}e^{3x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}e^3 - \left[\frac{1}{9}e^{3x}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^3 + \frac{1}{9} \\ &= \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}\end{aligned}$$

Et donc,

$$\begin{aligned}I_3 &= \frac{2}{3}e^3 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\int_0^1 xe^{3x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}e^3 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}\right) \\ &= \frac{2}{3}e^3 - \frac{1}{3} - \frac{4}{27}e^3 - \frac{2}{27} \\ &= \frac{14}{27}e^3 - \frac{11}{27}\end{aligned}$$

Exercice 4 ($\star\star$)

Soit $M \in [0; +\infty[$, calculons la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^M \frac{t}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t.$$

Pour cela, calculons une primitive de la fonction $f(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^3}$. Remarquons que :

$$\frac{t}{(1+t^2)^3} = t(1+t^2)^{-3}.$$

La fonction f semble être de la forme $u'u^\alpha$ avec $\alpha = -3$ et $u(t) = 1 + t^2$. On a $u'(t) = 2t$. Ainsi

$$u'u^\alpha = 2t(1+t^2)^{-3} = 2f(t).$$

Une primitive de f est donc donnée par :

$$F(t) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{-2}(1+t^2)^{-2} = -\frac{1}{4(1+t^2)^2}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^M \frac{t}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{4(1+t^2)^2}\right]_0^M \\ &= -\frac{1}{4(1+M^2)^2} + \frac{1}{4(1+0)^2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4(1+M^2)^2}.\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{M\to+\infty} -\dfrac{1}{4(1+M^2)^2} = 0$ donc

$$\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{4} - \frac{1}{4(1+M^2)^2} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}.$$

Exercice 5 $(\star\star)$

Soit $M \in [1;+\infty[$, calculons la valeur de l'intégrale
$$\int_1^M \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$
Pour cela, calculons une primitive de la fonction $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Remarquons que :
$$\frac{ln(x)}{x} = \frac{1}{x} \times \ln(x).$$
Ainsi f semble être de la forme $u'u$ avec $u(x) = \ln(x)$. Or $u'(x) = \frac{1}{x}$. On a donc :
$$u'u = \frac{1}{x}\ln(x) = f(x).$$
Ainsi une primitive de f est donnée par :
$$F(x) = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}(\ln(x))^2.$$
Ainsi :
$$\begin{aligned}\int_1^M \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}\ln(x)^2\right]_1^M \\ &= \frac{1}{2}\ln(M)^2 - \frac{1}{2}\ln(1)^2 \\ &= \frac{1}{2}\ln(M)^2.\end{aligned}$$
Or $\lim\limits_{M\to+\infty} \ln(M)^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty$ ainsi l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge.

Exercice 6 $(\star\star\star)$

Soit $M \in [0;+\infty[$, calculons l'intégrale $\int_0^M x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Pour cela, effectuons une intégration par parties. Commençons par remarquer que :
$$x^3\mathrm{e}^{-x^2} = x^2 \times x\mathrm{e}^{-x^2}$$
Posons $\begin{cases} u'(x) = x\mathrm{e}^{-x^2} \\ v(x) = x^2 \end{cases}$ alors $\begin{cases} u(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} \\ v'(x) = 2x \end{cases}$.

Par intégration par parties :
$$\begin{aligned}\int_0^M x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^M u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [u(x)v(x)]_0^M - \int_0^M u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}x^2\right]_0^M - \int_0^M -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} \times 2x\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}M^2\mathrm{e}^{-M^2} + \int_0^M x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}M^2\mathrm{e}^{-M^2} + \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^M \\ &= -\frac{1}{2}M^2\mathrm{e}^{-M^2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-M^2} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$
Or $\lim\limits_{M\to+\infty} \mathrm{e}^{-M^2} = 0$ et par croissance comparée, $\lim\limits_{M\to+\infty} M^2\mathrm{e}^{-M^2} = 0$ donc
$$\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2}M^2\mathrm{e}^{-M^2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-M^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^3 \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ converge et

$$\int_0^{+\infty} x^3 \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Exercice 7 $(\star\star\star)$

Commençons par chercher trois réels a, b et c tels que :

$$\forall x \geq 1, \quad \frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}.$$

En mettant le membre de droite au même dénominateur, on a :

$$\begin{aligned}\frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2} &= \frac{a(1+x)^2 + bx(1+x) + cx}{x(1+x)^2} \\ &= \frac{a + 2ax + ax^2 + bx + bx^2 + cx}{x(1+x)^2} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a}{x(1+x)^2}\end{aligned}$$

On procède alors par identification pour obtenir l'égalité, il faut

$$a = 1, \quad 2a + b + c = 0, \quad a + b = 0.$$

Ainsi on a :

$$a = 1, \quad b = -a = -1, \quad c = -2a - b = -2 + 1 = -1.$$

Ainsi

$$\forall x \geq 1, \quad \frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{1+x} + \frac{-1}{(1+x)^2}.$$

Soit $M \in [1; +\infty[$, calculons la valeur de l'intégrale $\int_1^M \frac{1}{x(1+x)^2}\, \mathrm{d}x$. Pour cela, calculons une primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{x(1+x)^2}$. D'après ce qui précède, on a :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Il nous faut donc calculer une primitive des trois termes composant f.

1. Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est donnée par $x \mapsto \ln(x)$.
2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1 + x$. Ainsi une primitive est donnée par $x \mapsto \ln|1+x|$.
   Une primitive de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{1+x}$ est donc donnée par $x \mapsto -\ln|1+x|$.
3. La fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$ est de la forme $u'u^\alpha$ avec $u(x) = 1 + x$ et $\alpha = -2$. Ainsi une primitive est donnée par $x \mapsto \frac{1}{-2+1}(1+x)^{-2+1} = -\frac{1}{1+x}$.
   Une primitive de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{(1+x)^2}$ est donc donnée par $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

Ainsi une primitive de f est donnée par :

$$F(x) = \ln(x) - \ln|1+x| + \frac{1}{1+x}.$$

Nous pouvons alors calculer l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_1^M \frac{1}{x(1+x)^2}\, \mathrm{d}x &= \left[\ln(x) - \ln|1+x| + \frac{1}{1+x}\right]_1^M \\ &= \ln(M) - \ln|1+M| + \frac{1}{1+M} - \ln(1) + \ln|1+1| - \frac{1}{1+1} \\ &= \ln(M) - \ln(1+M) + \frac{1}{1+M} + \ln(2) - 1 \\ &= \ln\left(\frac{M}{1+M}\right) + \frac{1}{1+M} + \ln(2) - 1\end{aligned}$$

Il nous reste alors à calculer la limite du terme $\ln\left(\dfrac{M}{1+M}\right)+\dfrac{1}{1+M}+\ln(2)-1$. A priori, la limite du terme $\ln\left(\dfrac{M}{1+M}\right)$ est une forme indéterminée. Factorisons :

$$\ln\left(\frac{M}{1+M}\right)=\ln\left(\frac{M}{M\left(\frac{1}{M}+1\right)}\right)=\ln\left(\frac{1}{\frac{1}{M}+1}\right).$$

On en déduit donc par composée de limites que $\lim\limits_{M\to+\infty}\ln\left(\dfrac{M}{1+M}\right)=\ln(1)=0$. Or $\lim\limits_{M\to+\infty}\dfrac{1}{1+M}=0$, ainsi

$$\lim_{M\to+\infty}\ln\left(\frac{M}{1+M}\right)+\frac{1}{1+M}+\ln(2)-1=\ln(2)-1.$$

On en déduit donc que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$ converge et que :

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)^2}\,\mathrm{d}x=\ln(2)-1.$$

Exercice 8 ($\star\star\star$)

1. Soit $A\geq 0$, calculons l'intégrale $\displaystyle\int_0^A x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

   Effectuons une intégration par parties. Posons $\begin{cases}u'(x)=\mathrm{e}^{-x}\\ v(x)=x\end{cases}$ alors $\begin{cases}u(x)=-\mathrm{e}^{-x}\\ v'(x)=1\end{cases}$.

   Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^A x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x&=\int_0^A u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x\\&=[u(x)v(x)]_0^A-\int_0^A u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\\&=\left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^A-\int_0^A -\mathrm{e}^{-x}\times 1\,\mathrm{d}x\\&=-A\mathrm{e}^{-A}+\int_0^A \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\&=-A\mathrm{e}^{-A}+\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^A\\&=-A\mathrm{e}^{-A}+(-\mathrm{e}^{-A}-(-\mathrm{e}^{-0}))\\&=-A\mathrm{e}^{-A}-\mathrm{e}^{-A}+1.\end{aligned}$$

   Ainsi

$$\int_0^A x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=1-A\mathrm{e}^{-A}-\mathrm{e}^{-A}.$$

   Or $\lim\limits_{A\to+\infty}\mathrm{e}^{-A}=0$ et par croissance comparée $\lim\limits_{A\to+\infty}A\mathrm{e}^{-A}=0$, donc :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=1.$$

2. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge et que :

$$\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=1.$$

Exercice 9 ($\star\star\star$)

Soit $x<0$, calculons $F(x)$. On a :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)t.$$

Comme $x<0$, la variable d'intégration $t\in]-\infty;x[$, on a $t<0$ et donc $f(t)=0$. Ainsi pour $x<0$, $F(x)=0$.
Soit $x\geq 0$, calculons $F(x)$. On a :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)t.$$

D'après la relation de Chasles, on a :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} f(t)t+\int_{0}^{x} f(t)t.$$

Or pour $t\in]-\infty;0[$, $f(t)=0$ et pour $t\in[0;x]$, $f(t)=\mathrm{e}^{-t}$, on a donc :

$$F(x)=0+\int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-t}t=\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x=-\mathrm{e}^{-x}+1=1-\mathrm{e}^{-x}.$$

Exercice 10 ($\star\star\star$)

1. Soit $A\geq 1$, calculons $I_A=\displaystyle\int_1^A \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x$. Pour cela posons, $f(x)=\dfrac{2}{x^3}$. On a :

$$f(x)=2x^{\alpha} \quad \text{avec } \alpha=-3.$$

Ainsi une primitive de f est donnée par :

$$F(x)=2\times\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}=\frac{2}{-2}x^{-2}=-\frac{1}{x^2}.$$

On a alors :

$$I_A=\left[-\frac{1}{x^2}\right]_1^A=-\frac{1}{A^2}+\frac{1}{1}=1-\frac{1}{A^2}.$$

2. On a $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{A^2}=0$ donc

$$\lim_{A\to+\infty} I_A=1.$$

3. En utilisant la relation de Chasles et l'expression de la fonction f, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{+\infty} \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x=\int_{1}^{+\infty} \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ revient donc à étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x$.
Cela a été fait dans les questions précédentes, on a montré que :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x=1.$$

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1. On peut donc conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1.$$

Exercice 11 ($\star\star\star$)

1. On a, pour tout $x \geq 0$,
$$m'(x) = \frac{-2x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

2. D'après la question précédente, une primitive de $f(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est donnée par :
$$F(x) = -\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$
On a donc,
$$I(M) = \int_0^M x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\Big]_0^M = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{M^2}{2}}$$
On a par ailleurs,
$$\lim_{M\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{M^2}{2}} = 0$$
donc,
$$\lim_{M\to+\infty} I(M) = 1$$

3. En utilisant la relation de Chasles et l'expression de la fonction f, on obtient :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$$
Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ revient donc à étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$. Cela a été fait dans les questions précédentes, on a montré que :
$$\lim_{M\to+\infty} \int_0^M x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 1.$$
Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1. On peut donc conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et que :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$