Intégrales généralisées

Rappels : Intégration sur un segment

Exercice 1 (⋆⋆)

Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^2 - 3x + 7$
2. $f_2(x) = -\dfrac{3}{x}$
3. $f_3(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{x^3}$
5. $f_5(x) = (7x+1)^8$
6. $f_6(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^4}$
7. $f_7(x) = \dfrac{1}{x}(\ln(x))^2$
8. $f_8(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$
9. $f_9(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x^2+2x}$

Exercice 2 (⋆⋆)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-2}^{3} (x^3+x-2)\mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{3}^{11} \sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{t^4}{\sqrt{t^5+3}}\mathrm{d}t$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{1}^{2} \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$
5. $I_5 = \displaystyle\int_{0}^{2} \frac{2x-1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$

Exercice 3 (⋆⋆⋆)

Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties :

1. $I_1 = \displaystyle\int_{0}^{1} te^{2t}\mathrm{d}t$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{1}^{2} t\ln(t)\mathrm{d}t$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{0}^{1} (x^2+1)e^{3x}\mathrm{d}x$

Intégrales généralisées

Exercice 4 (⋆⋆)

Montrer que l'intégrale généralisée suivante converge et déterminer sa valeur :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^3}\mathrm{d}t.$$

Exercice 5 (⋆⋆)

Montrer que l'intégrale généralisée suivante diverge :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Exercice 6 (⋆⋆⋆)

En utilisant une intégration par parties, montrer que l'intégrale généralisée suivante converge et déterminer sa valeur :

$$\int_0^{+\infty} x^3\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

Exercice 7 (⋆⋆⋆)

Déterminer trois réels a, b et c tels que

$$\forall x \geq 1, \quad \frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}.$$

En déduire l'existence et la valeur de l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)^2}\mathrm{d}x.$$

Exercice 8 (⋆⋆⋆)

1. À l'aide d'une intégration par parties, donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^A x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ puis calculer
$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$
2. Que peut-on en déduire pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$?

Exercice 9 (⋆⋆⋆)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ e^{-t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$

En séparant les cas $x < 0$ et $x \geq 0$, calculer l'expression

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 10 ($\star\star\star$)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Calculer pour tout réel A strictement supérieur à 1 l'intégrale
$$I_A = \int_1^A \frac{2}{x^3}\mathrm{d}x.$$
2. Calculer $\lim\limits_{A \to +\infty} I_A$.
3. En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge et déterminer sa valeur.

Exercice 11 ($\star\star\star$)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x\mathrm{e}^{-x^2} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

1. Calculer la dérivée de la fonction m définie pour tout réel x positif ou nul par
$$m(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$
2. Soit M un réel strictement positif. On pose
$$I(M) = \int_0^M x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x.$$
Déduire de la question précédente la valeur de $I(M)$ puis calculer $\lim\limits_{M \to +\infty} I(M)$.
3. En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge et déterminer sa valeur.