Variables aléatoires discrètes

Exercice 1 ($\star$)

1. On sait que $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$ donc :
$$P(X=3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)=1-\frac{1}{10}-\frac{1}{8}-\frac{1}{5}=\frac{40-4-5-8}{40}=\frac{23}{40}.$$
2. On a :
$$E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{23}{40}=\frac{5+16+69}{40}=\frac{90}{40}=\frac{9}{4}.$$
Pour calculer la variance, on utilise la formule de König-Huygens : $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$. On a :
$$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{1}{8}+2^2\times\frac{1}{5}+3^3\times\frac{23}{40}=\frac{5+32+207}{40}=\frac{244}{40}=\frac{61}{10}$$
On a alors :
$$V(X)=\frac{61}{10}-\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{61}{10}-\frac{81}{16}=\frac{976-810}{160}=\frac{166}{160}=\frac{83}{80}$$

Exercice 2 ($\star$)

1. Comme les événements $[X=3]$ et $[X=4]$ ont même probabilité, notons $x=P(X=3)=P(X=4)$, on a alors :
$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$$
soit
$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+2x=1$$
ainsi
$$x=\frac{1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)}{2}=\frac{1-\frac{1}{10}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{20-2-5-10}{20}}{2}=\frac{3}{40}.$$
En conclusion, $P(X=3)=P(X=4)=\frac{3}{40}$.
2. On a :
$$E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{3}{40}+4\times\frac{3}{40}=\frac{10+40+9+12}{40}=\frac{71}{40}.$$
Par définition de l'écart-type, $\sigma_X=\sqrt{V(X)}$, calculons donc la variance à l'aide de la formule de König-Huygens. On a :
$$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{3}{40}+4^2\times\frac{3}{40}=\frac{20+80+27+48}{40}=\frac{175}{40}=\frac{35}{8}$$
On a alors :
$$V(X)=\frac{35}{8}-\left(\frac{71}{40}\right)^2=\frac{35}{8}-\frac{5041}{1600}=\frac{7000-5041}{1600}=\frac{1959}{1600}.$$
En conclusion, $\sigma_X=\sqrt{\frac{1959}{1600}}=\frac{\sqrt{1959}}{40}$.

Exercice 3 ($\star\star$)

1. (a) On a $X(\Omega)=\{-0,5\,;\,0,5\,;\,1,5\}$. Par ailleurs,
$$P(X=1,5)=P(\{(1;1)\})=\frac{1}{36}$$
$$P(X=0,5)=P(\{(2;2);(3;3);(4;4);(5;5);(6;6)\})=\frac{5}{36}$$
$$P(X=-0,5)=1-P(X=0,5)-P(X=1,5)=1-\frac{5}{36}-\frac{1}{36}=\frac{30}{36}$$
On peut ainsi résumer la loi de X par le tableau suivant :

x	$-0,5$	$0,5$	$1,5$
$P(X=x)$	$\frac{30}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. (a) On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(X=k) = \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2}}_{k-1 \text{ fois FACE}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{PILE} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Remarque : En fait, X suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$. En effet, X correspond au temps d'attente du premier succès lors de la répétition successive d'expériences de Bernoulli identiques et indépendantes.

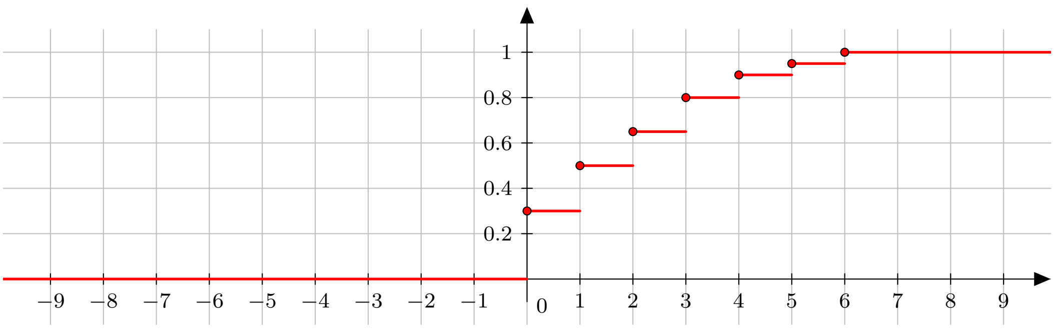
(b) On sait qu'une loi géométrique admet une espérance. Ainsi, X admet une espérance et

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Exercice 4 $(\star\star)$

1. La fonction de répartition de X est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0,3 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0,5 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0,65 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0,80 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0,90 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 0,95 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{si } x > 6 \end{cases}$$



2. La probabilité que la machine ait strictement plus de 3 pannes est :

$$P(X>3) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) = 0,1 = 0,05 + 0,05 = 0,2$$

3. On a :

$$E(X) = 0 \times 0,3 + 1 \times 0,2 + \cdots + 6 \times 0,05 = 1,9$$

Le nombre moyen de pannes par jour est donc de 1,9.

Exercice 5 $(\star\star\star)$

1. On a $X(\Omega) = [\![0;3]\!]$.
2. On note B_k l'évènement « la k-ième boule tirée est blanche » et N_k l'évènement « la k-ième boule tirée est noire ». Calculons les probabilités $P(X=k)$ pour $k \in [\![0;3]\!]$.
D'après la formule des probabilités composées :

$$P(X=0) = P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1 \cap N_2}(N_3) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{5}{42}$$

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(B_1\cap N_2\cap N_3)+P(N_1\cap B_2\cap N_3)+P(N_1\cap N_2\cap B_3) \\ &= \frac{4}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7} \\ &= \frac{10}{63}+\frac{10}{63}+\frac{10}{63} \\ &= \frac{30}{63} \\ &= \frac{10}{21} \\ &= \frac{20}{42} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P(B_1\cap B_2\cap N_3)+P(B_1\cap N_2\cap B_3)+P(N_1\cap B_2\cap B_3) \\ &= \frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}+\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7} \\ &= \frac{5}{42}+\frac{5}{42}+\frac{5}{42} \\ &= \frac{15}{42} \end{aligned}$$

Enfin, d'après la formule des probabilités composées :

$$P(X=3)=P(B_1\cap B_2\cap B_3)=\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{1}{21}=\frac{2}{42}$$

Ce que l'on peut résumer par le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{15}{42}$	$\frac{2}{42}$

3. On a alors :

$$E(X)=0\times\frac{5}{42}+1\times\frac{20}{42}+2\times\frac{15}{42}+3\times\frac{2}{42}=\frac{56}{42}=\frac{28}{21}=\frac{4}{3}$$

Par ailleurs,

$$E(X^2)=0^2\times\frac{5}{42}+1^2\times\frac{20}{42}+2^2\times\frac{15}{42}+3^2\times\frac{2}{42}=\frac{98}{42}=\frac{49}{21}=\frac{7}{3}$$

Donc, d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{7}{3}-\frac{16}{9}=\frac{21}{9}-\frac{16}{9}=\frac{5}{9}$$

Et donc,

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{5}{9}}$$

Exercice 6 ($\star\star\star$)

1. On a $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$.
2. Notons B_k (resp. N_k) l'évènement « la k-ième boule tirée est blanche (resp. noire) ». Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} P(X=k) &= P(B_1\cap B_2\cap\cdots B_{k-1}\cap N_k) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{k-1}{k}\times\frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{k(k+1)} \end{aligned}$$

Exercice 7 ($\star$)

1. Notons succès l'événement : « Obtenir une boule blanche », sa probabilité vaut $\frac{2}{5}$. La variable aléatoire X vaut 1 en cas de succès et 0 sinon, elle suit donc une **loi de Bernoulli** de paramètre $\frac{2}{5}$.

2. Notons succès l'événement : « Obtenir un numéro pair », sa probabilité est de $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. On répète 10 fois de manière identique et indépendante une expérience de Bernoulli et X est alors égale au nombre de succès. Ainsi X suit une **loi binomiale** de paramètres 10 et $\frac{1}{2}$. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10, \frac{1}{2})$.
3. Notons succès l'événement : « Obtenir une boule blanche », sa probabilité vaut $\frac{2}{5}$. On répète indéfiniment de manière identique et indépendante une expérience de Bernoulli jusqu'à obtenir le premier succès. Ainsi X est égale au rang du premier succès et elle suit donc une **loi géométrique** de paramètre $\frac{1}{2}$.
4. X prend ses valeurs dans l'intervalle $[\![1, 78]\!]$ et chaque valeur prise par X est équiprobable donc X suit une **loi uniforme** sur $[\![1, 78]\!]$.

Exercice 8 $(\star\star)$

1. On note X le nombre piles obtenus lors de ces 10 lancers. X compte le nombre de succès lors de la répétition de 10 expériences de Bernoulli successives, identiques et indépendantes. Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$. On a donc,
$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0,3^3 \times 0,7^7 = 120 \times 0,3^3 \times 0,7^7 \simeq 0,27.$$
2. On note X le nombre de lancers nécéssaires pour obtenir pile. X correspond au temps d'attente du premier succès lors de la répétition d'expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Ainsi, X suit une loi géométrique de paramètre $p = 0,3$. Ainsi, X admet une espérance et :
$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3} \simeq 3,3$$
En moyenne, on effectue donc $3,3$ lancers avant d'obtenir PILE.

Exercice 9 $(\star\star)$

1. On note X le nombre de chutes au terme de 10 balades. Alors, X compte le nombre de "succès" (*i.e* de chutes) lors de 10 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{10}$. On a donc :
$$P(X = k) = \binom{k}{10} \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(\frac{9}{10}\right)^{10-k}$$
2. La probabilité qu'il ne soit pas blessé après ces 10 balades, est :
$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$
On a :
$$P(X = 0) = \binom{0}{10} \left(\frac{1}{10}\right)^0 \left(\frac{9}{10}\right)^{10} = \left(\frac{9}{10}\right)^{10}$$
$$P(X = 1) = \binom{1}{10} \left(\frac{1}{10}\right)^1 \left(\frac{9}{10}\right)^9 = 10 \times \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{10}\right)^9 = \left(\frac{9}{10}\right)^9$$
$$P(X = 2) = \binom{2}{10} \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{9}{10}\right)^8 = 45 \times \frac{1}{100} \times \left(\frac{9}{10}\right)^8 = \frac{9}{20} \times \left(\frac{9}{10}\right)^8 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{9}{10}\right)^9$$
Ainsi,
$$P(X \leq 2) = \left(\frac{9}{10}\right)^{10} + \frac{3}{2} \times \left(\frac{9}{10}\right)^9 = \frac{24}{10} \times \left(\frac{9}{10}\right)^9$$

Exercice 10 $(\star\star)$

Notons X le nombre de changements d'emploi en 5 ans. On sait que X suit une loi de Poisson. Notons λ son paramètre. On sait que le nombre moyen de changements d'emploi en 5 ans est de deux. Autrement dit, on a :
$$E(X) = \lambda = 2$$
Ainsi, X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$.

1. On a :
$$P(X = 0) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} = e^{-2} \simeq 0,13$$
La probabilité qu'un travailleur ne fasse aucun changement en 5 ans est de environ $0,13$.

2. On a :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \simeq 1 - 0,13 = 0,87$$

La probabilité qu'un travailleur fasse au moins un changement en 5 ans est de $0,87$.

3. On a :

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 5) &= P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) \\ &= \frac{2^1}{1!}e^{-2} + \frac{2^2}{2!}e^{-2} + \frac{2^3}{3!}e^{-2} + \frac{2^4}{4!}e^{-2} + \frac{2^5}{5!}e^{-2} \\ &= \left(2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{15}\right)e^{-2} \\ &= \frac{94}{15}e^{-2} \\ &\simeq 0,81 \end{aligned}$$

Exercice 11 ($\star\star\star$)

1. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(J) &= P(R) \times P_R(J) + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(J) \\ &= \frac{60}{100} \times 1 + \frac{40}{100} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{180}{300} + \frac{40}{300} \\ &= \frac{220}{300} = \frac{11}{15} \end{aligned}$$

2. X compte le nombre de succès (*i.e* le nombre de réponses excates) lors de la répétition de 20 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \dfrac{11}{15}$.
On a alors $X(\Omega) = [\![0;20]\!]$ et pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$P(X = k) = \binom{20}{k}\left(\frac{11}{15}\right)^k\left(\frac{4}{15}\right)^{20-k}$$

3. Puisque X suit une loi binomiale, on a :

$$E(X) = np = 20 \times \frac{11}{15} = \frac{44}{3}$$

$$V(X) = np(1-p) = \frac{44}{3} \times \frac{4}{15} = \frac{176}{45}$$

4. (a) Il y a X bonnes réponses qui rapportent chacune un point et $20 - X$ mauvaises réponses qui enlèvent chacune deux points. Ainsi,

$$\begin{aligned} N &= 1 \times X - 2(20 - X) \\ &= X - 40 + 2X \\ &= 3X - 40 \end{aligned}$$

(b) On a donc :

$$E(N) = E(3X - 40) = 3E(X) - 40 = 3 \times \frac{44}{3} - 40 = 44 - 40 = 4$$

$$V(N) = V(3X - 40) = 3^2V(X) = 9 \times \frac{176}{45} = \frac{176}{5}$$

5. (a) Y compte le nombre de succès (*i.e* le nombre de réponses excates) lors de la répétition de 20 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Ainsi, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \dfrac{60}{100} = \dfrac{3}{5}$.

(b) La note que l'élève B obtient en moyenne est donc :

$$E(Y) = np = 20 \times \frac{3}{5} = 12$$

(c) La stratégie de l'élève B est donc meilleure, en moyenne, que celle de l'élève A.

Exercice 12 $(\star\star\star\star)$

1. (a) X_1 compte le nombre de succès (*i.e* le nombre de personnes descendant à l'étage 1) lors de la répétition successive de 5 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Ainsi, X_1 suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{3}$. On a $X_1(\Omega) = [\![0;5]\!]$ et pour tout $k \in X_1(\Omega)$:

$$P(X_1 = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{5}{k} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k \times \left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}$$

(b) Puisque X_1 suit une loi binomiale, on a :

$$E(X_1) = np = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$
$$V(X_1) = np(1-p) = \frac{5}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$$

(c) Puisque chaque personne choisit un étage de manière équiprobable, la probabilité pour une personne de monter à l'étage 1, 2 ou 3 est la même. Ainsi, X_2 et X_3 suivent la même loi que X_1.

2. (a) $X_1+X_2+X_3$ représente le nombre de personnes étant descendus à l'étage 1, 2 ou 3. Puisque les 5 personnes choisissent de descendre à l'un de ces trois étages, on a bien :

$$X_1 + X_2 + X_3 = 5$$

(b) L'évènement $(X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)$ correspond au fait que personne ne soit descendu à l'étage 1 ou à l'étage 2, autrement dit que tout le monde soit descendu à l'étage 3. Ainsi,

$$P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) = P(X_3 = 5)$$

Et puisque X_3 suit la même loi que X_1, on a :

$$P(X_3 = 5) = \binom{5}{5} \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$$

(c) L'ascenseur ne s'arrête qu'une fois si et seulement si :
- tout le monde descend à l'étage 1, ce qui correspond à l'évènement $X_1 = 5$;
- tout le monde descend à l'étage 2, ce qui correspond à l'évènement $X_2 = 5$;
- tout le monde descend à l'étage 3, ce qui correspond à l'évènement $X_3 = 5$.

Ainsi, la probabilité que l'ascenseur ne s'arrête qu'une fois est donnée par :

$$P(X_1 = 5) + P(X_2 = 5) + P(X_3 = 5) = \frac{1}{243} + \frac{1}{243} + \frac{1}{243} = \frac{3}{243} = \frac{1}{81}$$

3. L'ascenseur s'arrête soit une, soit deux, soit trois fois. Ainsi,

$$Z(\Omega) = [\![1;3]\!]$$

4. (a) On a $(Y_1 = 0)$ si et seulement si l'ascenseur ne s'arrête pas au premier étage. Autrement dit, $(Y_1 = 0)$ si et seulement si personne ne descend à l'étage 1. Ainsi, les évènements $(Y_1 = 0)$ et $(X_1 = 0)$ sont identiques. Ainsi,

$$P(Y_1 = 0) = P(X_1 = 0) = \binom{5}{0} \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$$

(b) On a donc :

$$P(Y_1 = 1) = 1 - P(Y_1 = 0) = 1 - \frac{32}{243} = \frac{211}{243}$$

Par ailleurs, Y_1 suit une loi de Bernoulli dont le paramètre p est donné par :

$$p = P(Y_1 = 1) = \frac{211}{243}$$

Ainsi,

$$E(Y_1) = p = \frac{211}{243}$$

(c) On a $Z = Y_1 + Y_2 + Y_3$. Or, Y_1, Y_2 et Y_3 ont la même espérance donc

$$E(Z) = E(Y_1) + E(Y_2) + E(Y_3) = \frac{211}{243} + \frac{211}{243} + \frac{211}{243} = \frac{3 \times 211}{243} = \frac{211}{81}$$

