Probabilités élémentaires

Exercice 1 ($\star$)

1. (a) Le contraire de l'évènement A « les deux cartes tirées sont rouges » est $\overline{A}$ « une des deux cartes tirées n'est pas rouge ».
   Attention *: le piège serait de penser que l'évènement contraire est « les deux cartes tirées sont noires ». Il est important de comprendre que tout tirage ne réalisant pas l'évènement « les deux cartes tirées sont rouges » réalise **par définition** l'évènement contraire. Par exemple, si une carte est rouge et que l'autre noire, l'évènement « les deux cartes tirées sont rouges » n'est pas réalisé, ce qui signifie que c'est l'évènement contraire qui est réalisé.*
   (b) $A \cap B \cap \overline{C}$: « les deux cartes tirées sont un valet rouge et un dix rouge »
   (c) $\left(A \cap \overline{C}\right) \cap \left(B \cap \overline{C}\right) = A \cap B \cap \overline{C}$: « les deux cartes tirées sont un valet rouge et un dix rouge »
   (d) $A \cap B \cap C = \emptyset$: évènement impossible.
2.
   - « les deux cartes tirées sont des figures » correspond à l'évènement C. Le fait qu'elles ne soient pas toutes les deux rouges correspond à l'évènement $\overline{A}$. Ainsi $F = \overline{A} \cap C$.
   - « on obtient au plus une figure » est l'évènement contraire de C. Ainsi $G = \overline{C}$.

Exercice 2 ($\star$)

1. L'ensemble des tirages possible est $\Omega = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$.
2. Le seul tirage pour lequel les deux jetons sont pairs est $(2,4)$, donc $A = \{(2,4)\}$.
   $\overline{A}$ correspond à l'ensemble des tirages pour lesquels les deux jetons ne sont pas pairs. Ainsi $\overline{A} = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,4)\}$.
   A **ou** $\overline{A}$ donne bien sûr l'ensemble des tirages possibles, i.e. $A \cup \overline{A} = \Omega$.
   A **et** $\overline{A}$ correspond bien sur à l'évènement impossible, i.e. $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
3. Tout d'abord, l'ensemble C est donné par $C = \{(1,3),(2,4)\}$. Dès lors,
   - $\overline{C} = \{(1,2),(1,4),(2,3),(3,4)\}$,
   - $A \cup C = \{(1,3),(2,4)\}$,
   - $A \cap C = \{(2,4)\}$,
   - $A \cup \overline{C} = \{(1,2),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$,
   - $A \cap \overline{C} = \emptyset$.

Exercice 3 ($\star\star$)

1.
   - « le premier 6 a été obtenu au deuxième lancer » signifie que l'on n'a pas obtenu de 6 au premier lancer **et** que l'on a obtenu un 6 au deuxième lancer. Ainsi $P_2 = \overline{A_1} \cap A_2$.
   - « le premier 6 a été obtenu au cinquième lancer » signifie que l'on n'a pas obtenu de 6 aux premier, deuxième, troisième et quatrième lancers, **et** que l'on a obtenu un 6 au cinquième lancer. Ainsi $P_5 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap A_5$.
   - De la même manière, $P_n = \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n$.
2. Si le deuxième 6 a été obtenu au troisième lancer, alors il y a deux possibilités :
   - soit le premier 6 a été obtenu au premier lancer et le deuxième 6 au troisième,
   - soit le premier 6 a été obtenu au deuxième lancer et le deuxième 6 au troisième.

   Ainsi
   $$D_3 = \left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right).$$
   Si le deuxième 6 a été obtenu au quatrième lancer, alors il y a cette fois trois possibilités :
   - soit le premier 6 a été obtenu au premier lancer et le deuxième 6 au quatrième,
   - soit le premier 6 a été obtenu au deuxième lancer et le deuxième 6 au quatrième,
   - soit le premier 6 a été obtenu au troisième lancer et le deuxième 6 au quatrième.

   Ainsi
   $$D_4 = \left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap A_4\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap A_4\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cap A_4\right).$$

Exercice 4 $(\star)$

Je suis ici dans une situation d'équiprobabilité.

1. L'univers Ω est donné par

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(2,6),\ldots,(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}.$$

Donc $card(\Omega) = 36$. Par ailleurs, si je note A l'évènement « la somme des numéros est égale à 8 », alors $A = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$ et donc $card(A) = 5$. Ainsi

$$P(A) = \frac{5}{36}.$$

2. Les 11 sommes possibles ne sont pas toutes équiprobables. Par exemple, la somme des deux dés ne vaut 2 que dans le cas où l'on a obtenu $(1,1)$, et cet évènement a une probabilité $\frac{1}{36}$. Alors que la somme des deux dés vaut 8 dans 5 cas différents, ce qui amène donc à une probabilité de $\frac{5}{36}$.

Exercice 5 $(\star\star)$

Je suis ici dans une situation d'équiprobabilité.

1. L'ensemble Ω est constitué de toutes les cartes du jeu :

$$\Omega = \{7\diamondsuit, 7\heartsuit, 7\spadesuit, 7\clubsuit, \ldots, \text{As}\diamondsuit, \text{As}\heartsuit, \text{As}\spadesuit, \text{As}\clubsuit\} \quad \text{et} \quad card(\Omega) = 32.$$

L'ensemble A est constitué de tous les piques

$$A = \{7\spadesuit, 8\spadesuit, \ldots, \text{As}\spadesuit\} \quad \text{et} \quad card(A) = 8.$$

L'ensemble B est constitué de toutes les cartes rouges

$$B = \{7\diamondsuit, 7\heartsuit, 8\diamondsuit, 8\heartsuit, \ldots, \text{As}\diamondsuit, \text{As}\heartsuit\} \quad \text{et} \quad card(B) = 16.$$

L'ensemble C est constitué de toutes les cartes représentant des figures

$$C = \{\text{Valet}\diamondsuit, \text{Valet}\heartsuit, \ldots, \text{Roi}\spadesuit, \text{Roi}\clubsuit\} \quad \text{et} \quad card(C) = 12.$$

Ainsi je peux d'ores et déjà affirmer que

$$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}, \qquad P(B) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(C) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}.$$

Par ailleurs $A \cap B = \emptyset$, puisqu'une carte ne peut à la fois être un pique et être rouge. Donc $P(A \cap B) = 0$. L'évènement $B \cap C$ est constitué de toutes les figures rouges, donc

$$B \cap C = \{\text{Valet}\diamondsuit, \text{Valet}\heartsuit, \ldots, \text{Roi}\diamondsuit, \text{Roi}\heartsuit\} \quad \text{et} \quad card(B \cap C) = 6.$$

Donc $P(B \cap C) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$.

Il me reste à calculer $P(A \cup B)$ et $P(B \cup C)$. Les évènements A et B étant incompatibles,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}.$$

Et pour calculer $P(B \cup C)$, j'utilise la formule de Poincaré :

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{3}{16} = \frac{8}{16} + \frac{6}{16} - \frac{3}{16} = \frac{11}{16}.$$

Remarque : Pour calculer $P(A \cup B)$ et $P(B \cup C)$, je peux également expliciter les ensembles $A \cup B$ et $B \cup C$ ainsi que leurs cardinaux, puis en déduire directement les probabilités.

$$A \cup B = \{7\diamondsuit, 7\heartsuit, 7\spadesuit, \ldots, \text{As}\diamondsuit, \text{As}\heartsuit, \text{As}\spadesuit\} \quad \text{et} \quad card(A \cup B) = 24.$$

$$B \cup C = \{7\diamondsuit, 7\heartsuit, \ldots, \text{As}\diamondsuit, \text{As}\heartsuit, \text{Valet}\spadesuit, \text{Valet}\clubsuit, \ldots, \text{Roi}\spadesuit, \text{Roi}\clubsuit\} \quad \text{et} \quad card(B \cup C) = 22.$$

Donc

$$P(A \cup B) = \frac{24}{32} = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad P(B \cup C) = \frac{22}{32} = \frac{11}{16}.$$

2. Je peux tout d'abord remarquer que $D = \overline{B} \cap \overline{C} = \overline{B \cup C}$. Ainsi

$$P(D) = P(\overline{B \cup C}) = 1 - P(B \cup C) = 1 - \frac{11}{16} = \frac{16}{16} - \frac{11}{16} = \frac{5}{16}.$$

Exercice 6 ($\star\star$)

Notons ainsi les événements suivants :

- C : « aimer les citrons »
- O : « aimer les oranges »

1. Nous devons calculer $P(O \cap \overline{C})$. En utilisant les formules du cours, on obtient :

$$P(O \cap \overline{C}) = P(O) - P(O \cap C) = 0,8 - 0,3 = 0,5.$$

2. Nous devons calculer $P(O \cup C)$. D'après la formule de Poincaré, nous avons :

$$P(O \cup C) = P(O) + P(C) - P(O \cap C) = 0,8 + 0,4 - 0,3 = 0,9.$$

3. Nous devons calculer $P(\overline{O} \cap \overline{C})$. En utilisant les formules du cours, on obtient :

$$P(\overline{O} \cap \overline{C}) = 1 - P(\overline{\overline{O} \cap \overline{C}}) = 1 - P(O \cup C) = 0,1.$$

4. Nous devons calculer $P(O \cap \overline{C} \cup \overline{O} \cap C)$. D'après la formule de Poincaré, nous avons :

$$P(O \cap \overline{C} \cup \overline{O} \cap C) = P(O \cap \overline{C}) + P(\overline{O} \cap C) - P(O \cap \overline{C} \cap \overline{O} \cap C) = 0,5 + P(\overline{O} \cap C) - 0$$

Or $P(\overline{O} \cap C) = P(\overline{0}) - P(\overline{O} \cap \overline{C}) = 1 - P(O) - P(\overline{O} \cap \overline{C}) = 1 - 0,8 - 0,1 = 0,1$.
Ainsi $P(O \cap \overline{C} \cup \overline{O} \cap C) = 0,5 + 0,1 = 0,6$.

Exercice 7 ($\star$)

Si la pièce donne Pile, alors le tirage a lieu dans l'urne U_1. Puisqu'il y a une boule blanche et deux boules noires dans l'urne U_1, alors

$$P_P(B) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P_P(N) = \frac{2}{3}.$$

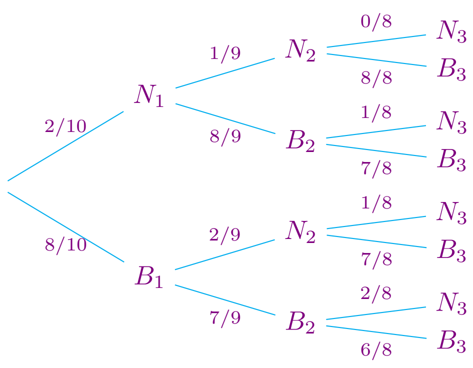
Si la pièce donne Face, alors le tirage a lieu dans l'urne U_2. Puisqu'il n'y a que des boules noires dans l'urne U_2, alors

$$P_F(B) = 0 \quad \text{et} \quad P_F(N) = 1.$$

Enfin, si le tirage donne une boule blanche, alors le tirage a forcément eu lieu dans l'urne U_1 puisqu'il n'y a pas de boule blanche dans l'urne U_2. Autrement dit, la pièce est retombée sur le côté Pile

Exercice 8 ($\star\star\star$)

Je commence par représenter la situation par un arbre pondéré.



Je souhaite calculer la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire, c'est-à-dire de l'évènement N_3. Je dois donc faire la somme des probabilités de chacune des branches menant à l'évènement N_3.

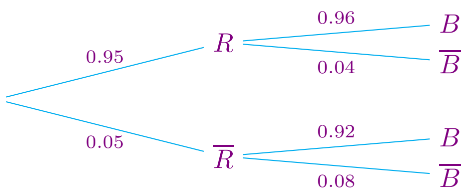
Pour $k \in \{1,2,3\}$, je note N_k l'évènement « la k-ième boule tirée est noire » et B_k l'évènement « la k-ième boule tirée est blanche ».
D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}P(N_3) &= P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \times P_{N_1 \cap N_2}(N_3) + P(N_1) \times P_{N_1}(B_2) \times P_{N_1 \cap B_2}(N_3)\\ &+ P(B_1) \times P_{B_1}(N_2) \times P_{B_1 \cap N_2}(N_3) + P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(N_3)\\ &= \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} \times \frac{0}{8} + \frac{2}{10} \times \frac{\cancel{8}}{9} \times \frac{1}{\cancel{8}} + \frac{\cancel{8}}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{\cancel{8}} + \frac{\cancel{8}}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{\cancel{8}} \frac{1}{45} + \frac{1}{45} + \frac{7}{45} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

La troisième boule est noire avec probabilité $\frac{1}{5}$.

Exercice 9 $(\star\star)$

Je réalise un arbre pondéré pour modéliser la situation.



1. D'après l'énoncé,

$$\begin{aligned}&P(\overline{R}) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}, \qquad P_{\overline{R}}(\overline{B}) = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}, \qquad P_R(\overline{B}) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25},\\ &P(R) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}, \qquad P_{\overline{R}}(B) = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25} \quad \text{et} \quad P_R(B) = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}.\end{aligned}$$

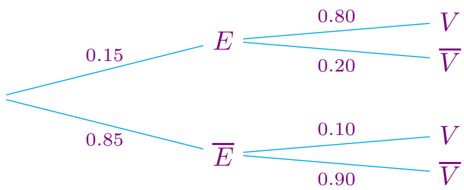
2. D'après la formule des probabilités totales, comme $\{R, \overline{R}\}$ forme un système complet d'évènements,

$$\begin{aligned}P(B) &= P(R) \times P_R(B) + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(B) \quad \text{Somme de chacune des branches menant à } B\\ &= \frac{19}{20} \times \frac{24}{25} + \frac{1}{20} \times \frac{23}{25}\\ &= \frac{456}{500} + \frac{23}{500}\\ &= \frac{479}{500} = 0.958\end{aligned}$$

Donc 95.8% des bouteilles sont bien remplies.

Exercice 10 $(\star\star)$

Je réalise un arbre pondéré pour modéliser la situation.



1. D'après l'énoncé,

$$\begin{aligned}&P(E) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}, \qquad P_E(V) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}, \qquad P_{\overline{E}}(V) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10},\\ &P(\overline{E}) = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}, \qquad P_E(\overline{V}) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad P_{\overline{E}}(\overline{V}) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.\end{aligned}$$

2. D'après la formule des probabilités totales, comme $\{E, \overline{E}\}$ forme un système complet d'évènements,

$$\begin{aligned}P(V) &= P(E) \times P_E(V) + P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(V) \quad \text{Somme de chacune des branches menant à } V\\ &= \frac{3}{20} \times \frac{4}{5} + \frac{17}{20} \times \frac{1}{10}\\ &= \frac{12}{100} + \frac{17}{200}\\ &= \frac{41}{200} = 0.205\end{aligned}$$

Donc 20.5% des sacs contiennent des pommes de variétés différentes.

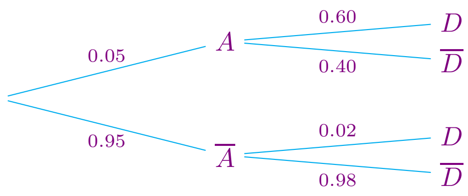
3. Je cherche $P_V(\overline{E})$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_V(\overline{E}) = \frac{P(V \cap \overline{E})}{P(V)} = \frac{17}{200} \times \frac{200}{41} = \frac{17}{41}.$$

Le sac a été acheté en supermarché avec probabilité $\dfrac{17}{41}$.

Exercice 11 $(\star\star)$

Je réalise un arbre pondéré pour modéliser la situation.



1. D'après l'énoncé,

$$P(A) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}, \qquad P_A(D) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}, \qquad P_{\overline{A}}(\overline{D}) = \frac{98}{100} = \frac{49}{50},$$
$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}, \qquad P_A(\overline{D}) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad P_{\overline{A}}(D) = 1 - \frac{49}{50} = \frac{1}{50}.$$

2. D'après la formule des probabilités totales, comme $\{A, \overline{A}\}$ forme un système complet d'évènements,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A) \times P_A(D) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(D) \quad \text{Somme des branches menant à l'évènement } D \\ &= \frac{1}{20} \times \frac{3}{5} + \frac{19}{20} \times \frac{1}{50} \\ &= \frac{3}{100} + \frac{19}{1000} \\ &= \frac{49}{1000} = 0.049 \end{aligned}$$

Donc 4.9% des CD achetés sont défectueux.

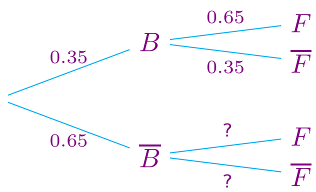
3. Je cherche $P_D(A)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

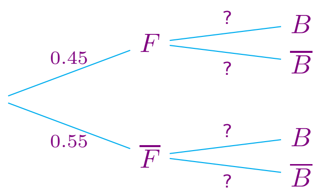
$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{3}{100} \times \frac{1000}{49} = \frac{30}{49}.$$

Le client a acheté une boîte abîmée avec probabilité $\dfrac{30}{49}$.

Exercice 12 $(\star\star\star)$

Je réalise un arbre pondéré pour modéliser la situation. Je note F l'évènement « être fumeur » et B l'évènement « avoir une bronchite ». Au vu des informations données dans l'énoncé, je peux réaliser deux arbres différents :





Pour chaque arbre, (au moins) une des informations données dans l'énoncé n'est pas utilisée. Sur le premier arbre, je n'ai pas utilisé le fait que $P(F) = \dfrac{45}{100}$. Sur le deuxième arbre, je n'ai ni utilisé le fait que $P(B) = \dfrac{35}{100}$, ni que $P_B(F) = \dfrac{65}{100}$.
Le premier arbre est sans aucun doute le plus utile pour résoudre l'exercice, puisque c'est celui qui comporte le moins d'inconnues (et qui par ailleurs utilise le plus de données de l'énoncé).

1. J'exprime les évènements dont je dois calculer les probabilités en fonction de B et de F :
$$E_1 = B \cap F, \qquad E_2 = B \cap \overline{F} \quad \text{et} \quad E_3 = \overline{B} \cap \overline{F}.$$
Alors, d'après la formule des probabilités composées,
$$P(E_1) = P(B \cap F) = P(B) \times P_B(F) = \frac{35}{100} \times \frac{65}{100} = \frac{7}{20} \times \frac{13}{20} = \frac{91}{400},$$
$$P(E_2) = P(B \cap \overline{F}) = P(B) \times P_B(\overline{F}) = \frac{35}{100} \times \frac{35}{100} = \frac{7}{20} \times \frac{7}{20} = \frac{49}{400}.$$
Par ailleurs, je sais que $P(F) = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$, donc $P(\overline{F}) = 1 - P(F) = \frac{11}{20}$. Et d'après la formule des probabilités totales, comme $\{B, \overline{B}\}$ forme un système complet d'évènements,
$$\begin{aligned} P(\overline{F}) &= P(B \cap \overline{F}) + P(\overline{B} \cap \overline{F}) \\ \frac{11}{20} &= \frac{91}{400} + P(\overline{B} \cap \overline{F}) \\ P(\overline{B} \cap \overline{F}) &= \frac{11}{20} - \frac{91}{400} = \frac{220}{400} - \frac{91}{400} = \frac{129}{400}. \end{aligned}$$
Autrement dit
$$P(E_3) = P(\overline{B} \cap \overline{F}) = \frac{129}{400}.$$
2. Je compare $P(B) \times P(F)$ et $P(B \cap F)$.
$$P(B) \times P(F) = \frac{7}{20} \times \frac{9}{20} = \frac{63}{400} \quad \text{et} \quad P(B \cap F) = P(E_1) = \frac{91}{400},$$
donc les évènements F et B ne sont pas indépendants.
3. Je cherche $P_F(B)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,
$$P_F(B) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)} = \frac{91}{400} \times \frac{20}{9} = \frac{91}{20 \times 9} = \frac{91}{180}.$$
Ce fumeur a une bronchite avec probabilité $\frac{91}{180}$.

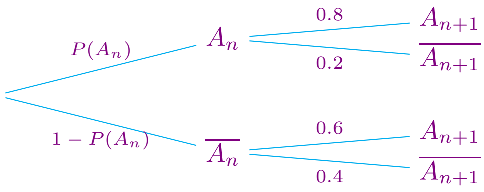
Exercice 13 ($\star\star$)

[TD2 bis, Exercice 1]

1. D'après l'énoncé, on a :
   - $P(A) = 0,34$ et $P(\overline{A}) = 0,66$;
   - $P_A(B) = 0,95$ et $P_A(\overline{B}) = 0,05$;
   - $P_{\overline{A}}(B) = 0,84$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,16$.
2. On cherche à calculer $P(A \cap \overline{B})$. D'après la formule des probabilités composées, on a :
$$P(A \cap \overline{B}) = P(A)P_A(\overline{B}) = 0,34 \times 0,05 = 0,017 \simeq 0,02.$$
La probabilité qu'un coureur ait plus de 60 ans et ait couru le marathon en moins de 234 minutes est d'environ $\boxed{0{,}02}$.
3. D'après la formule des probabilités totales, $\{A, \overline{A}\}$ étant un système complet d'événements :
$$\begin{aligned} P(B) &= P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B) \\ &= 0,34 \times 0,95 + 0,66 \times 0,84 \\ &\simeq 0,32 + 0,55 \\ &\simeq 0,87 \end{aligned}$$
4. Il nous faut calculer $P_{\overline{B}}(A)$. On a :
$$\begin{aligned} P_{\overline{B}}(A) &= \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(\overline{B})} \\ &= \frac{0,34 \times 0,05}{1 - 0,87} \\ &\simeq \frac{0,02}{0,13} \\ &\simeq 0,15 \end{aligned}$$

Exercice 14 $(\star\star\star)$

[TD2bis, Exercice 2] Je réalise un arbre pondéré pour modéliser la situation.



1. (a) D'après l'énoncé,
$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 0.8 \quad \text{et} \quad P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 0.6.$$

   (b) D'après la formule des probabilités totales, comme pour tout $n \geq 1$, $\{A_n, \overline{A_n}\}$ forme un système complet d'évènements,
$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times 0.8 + \big(1 - P(A_n)\big) \times 0.6 \\ &= 0.8P(A_n) + 0.6 - 0.6P(A_n) \\ &= 0.2P(A_n) + 0.6 \end{aligned}$$

2. (a) On se rappelle le Chapitre 7 de première année.
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - 0.75 \\ &= 0.2p_n + 0.6 - 0.75 \\ &= 0.2(u_n + 0.75) - 0.15 \\ &= 0.2u_n + 0.15 - 0.15 \\ &= 0.2u_n \end{aligned}$$
La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc bien une suite géométrique de raison 0.2.

   (b) Comme la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison 0.2 et que son premier terme vaut $u_1 = p_1 - 0.75 = 0.7 - 0.75 = -0.05$, alors pour tout $n \geq 1$,
$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = -0.05 \times (0.2)^{n-1}.$$
Et donc pour tout $n \geq 1$,
$$p_n = u_n + 0.75 = 0.75 - 0.05 \times (0.2)^{n-1}.$$

Exercice 15 $(\star\star\star)$

[TD2bis, Exercice 3]

Partie A

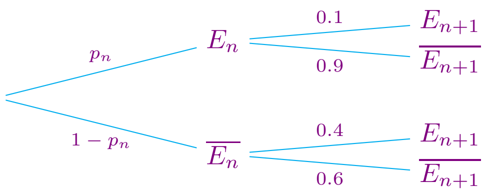
1. On se rapelle le Chapitre 7 de première année.
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 13u_{n+1} - 4 \\ &= 13\left(\frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n\right) - 4 \\ &= \frac{52}{10} - \frac{39}{10}u_n - 4 \\ &= \frac{52}{10} - \frac{39}{10}\left(\frac{1}{13}v_n + \frac{4}{13}\right) - 4 \\ &= \frac{52}{10} - \frac{3}{10}v_n - \frac{12}{10} - 4 \\ &= \frac{52}{10} - \frac{3}{10}v_n - \frac{12}{10} - \frac{40}{10} \\ &= -\frac{3}{10}v_n \end{aligned}$$
Donc $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $-\dfrac{3}{10}$.

2. Comme la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison $-\dfrac{3}{10}$ et que son premier terme vaut $v_1 = 13u_1 - 4 = 13 \times \dfrac{1}{2} - 4 = \dfrac{13}{2} - \dfrac{8}{2} = \dfrac{5}{2}$, alors pour tout $n \geq 1$,
$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = \frac{5}{2} \times \left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}.$$

3. On a :
$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{13}v_n + \frac{4}{13} \\ &= \frac{1}{13} \times \frac{5}{2} \times \left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1} + \frac{4}{13} \\ &= \frac{4}{13} + \frac{5}{26}\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1} \end{aligned}$$
J'ai bien montré que pour tout $n \geq 1$, $\quad u_n = \dfrac{4}{13} + \dfrac{5}{26}\left(-\dfrac{3}{10}\right)^{n-1}$.

Partie B

Je réalise un arbre pondéré pour modéliser la situation.



1. D'après l'énoncé,
$$P_{E_n}(E_{n+1}) = \frac{1}{10} \quad \text{et} \quad P_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

2. D'après la formule des probabilités totales, comme pour tout $n \geq 1$, $\{E_n, \overline{E_n}\}$ forme un système complet d'évènements,
$$\begin{aligned} P(E_{n+1}) &= P(E_n) \times P_{E_n}(E_{n+1}) + P(\overline{E_n}) \times P_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) \\ &= p_n \times \frac{1}{10} + (1 - p_n) \times \frac{4}{10} \\ &= \frac{1}{10}p_n + \frac{4}{10} - \frac{4}{10}p_n \\ &= \frac{4}{10} - \frac{3}{10}p_n \end{aligned}$$

3. La suite $(p_n)_{n\geq 1}$ satisfait la même relation de récurrence que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ étudiée dans la Partie A. Par ailleurs, $p_1 = \dfrac{1}{2} = u_1$, donc pour tout $n \geq 1$,
$$p_n = u_n = \frac{4}{13} + \frac{5}{26}\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}.$$