Probabilités élémentaires

Exercice 1 ($\star$)

On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements

- A : "les deux cartes tirées sont rouges",
- B : "les deux cartes tirées sont un valet et un dix",
- C : "les deux cartes tirées sont des figures".

1. Que représentent les ensembles suivants ?
   (a) $\overline{A}$,
   (b) $A \cap B \cap \overline{C}$,
   (c) $(A \cap \overline{C}) \cap (B \cap \overline{C})$,
   (d) $(A \cap B) \cap C$.
2. Écrire à l'aide des ensembles A, B et C les événements
   - F : "les deux cartes tirées sont des figures et ne sont pas toutes les deux rouges",
   - G : "on obtient au plus une figure".

Exercice 2 ($\star$)

Dans une boîte, il y a 4 jetons disponibles numérotés de 1 à 4. On tire simultanément au hasard deux jetons.

1. Donner tous les tirages possibles.
   Pour la suite, on note A l'événement "les deux jetons sont pairs".
2. Quels sont les tirages constituant les ensembles suivants : $\overline{A}$, $A \cup \overline{A}$ et $A \cap \overline{A}$.
3. On considère C l'événement "la somme des chiffres sur les deux jetons est paire".
   Quels sont les tirages constituant les ensembles suivants ?

$$\overline{C}, \qquad A \cup C, \qquad A \cap C, \qquad A \cup \overline{C} \quad \text{et} \quad A \cap \overline{C}.$$

Exercice 3 ($\star\star$)

Une épreuve aléatoire consiste à effectuer des lancers successifs d'un dé. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, A_k désigne l'événement : "le k-ième lancer a fourni un 6". Exprimer les événements ci-dessous à l'aide des événements A_k et des opérations autorisées sur les événements.

- P_2 : "le premier 6 a été obtenu au deuxième lancer",
- P_5 : "le premier 6 a été obtenu au cinquième lancer",
- P_n : "le premier 6 a été obtenu au n-ième lancer", où $n \geq 2$.
- D_3 : "le deuxième 6 a été obtenu au troisième lancer",
- D_4 : "le deuxième 6 a été obtenu au quatrième lancer".

Exercice 4 ($\star$)

On lance un dé équilibré deux fois de suite.

1. Quelle est la probabilité que la somme des numéros obtenus soit égale à 8 ?
2. Il y a 11 sommes possibles (tous les entiers entre 2 et 12). Pourquoi la probabilité calculée à la première question n'est-elle pas tout simplement égale à $\frac{1}{11}$?

Exercice 5 ($\star\star$)

On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements

- A : "la carte choisie est un pique",
- B : "la carte choisie est rouge (coeur ou carreau)",
- C : "la carte choisie est une figure (valet, dame ou roi)".

1. Calculer les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(B \cap C)$, $P(A \cup B)$ et $P(B \cup C)$.
2. Calculer la probabilité de l'événement D : "la carte choisie n'est ni rouge, ni une figure".

Exercice 6 ($\star\star$)

Une enquête effectuée auprès d'un échantillon représentatif de la population française a révélé qu'il y a une probabilité
$0,8$ pour qu'un Français aime les oranges,
$0,4$ pour qu'un Français aime les citrons,
$0,3$ pour qu'un Français aime les oranges et citrons.
Quelle est la probabilité pour qu'un Français :

1. aime les oranges mais pas les citrons ?
2. aime les oranges ou les citrons ?
3. n'aime ni les oranges ni les citrons ?
4. aime soit les oranges, soit les citrons ?

Exercice 7 ($\star$)

On considère une urne U_1 contenant une boule blanche et deux boules noires, ainsi qu'une urne U_2 contenant trois boules noires. On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher. On lance une pièce équilibrée. Si elle retombe sur le côté pile, on tire une boule dans l'urne U_1, et si on obtient face, on tire une boule dans l'urne U_2. On considère les événements suivants :

- P (resp. F) : "la pièce retombe sur le côté pile (respectivement face)",
- B : "le tirage donne une boule blanche",
- N : "le tirage donne une boule noire".

Sans calcul, donner les valeurs des probabilités suivantes :

$$P_P(B),\ P_P(N),\ P_F(B),\ P_F(N),\ P_B(P),\ P_B(F).$$

Exercice 8 ($\star\star\star$)

Une urne contient huit boules blanches et deux boules noires. On tire sans remise et successivement trois boules de cette urne.
Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire ?

Exercice 9 ($\star\star$)

On s'intéresse à une entreprise chargée de mettre du lait en bouteilles. La bouteille vide arrive sur un tapis roulant et passe successivement dans deux machines M_1 et M_2. La machine M_1 remplit la bouteille de lait et la machine M_2 met le bouchon. Une étude statistique portant sur un grand nombre de bouteilles de lait à la fin de la chaîne a permis d'établir que 5% des bouteilles ne sont pas correctement remplies et que parmi elles 8% n'ont pas de bouchon. D'autre part, 4% des bouteilles correctement remplies n'ont pas de bouchon. On choisit une bouteille de lait au hasard à la fin de la chaîne et on note

- R l'événement : "la bouteille est correctement remplie",
- B l'événement : "la bouteille a un bouchon".

1. Donner les valeurs de $P(R)$, $P(\overline{R})$, $P_R(B)$, $P_R(\overline{B})$, $P_{\overline{R}}(\overline{B})$ et $P_{\overline{R}}(B)$.
2. Calculer $P(B)$.

Exercice 10 ($\star\star$)

Une association de consommateurs a fait une enquête sur des ventes de sacs de pommes. On sait que

- 15% des sacs sont vendus directement dans l'exploitation agricole et le reste est vendu dans des supermarchés.
- Parmi les sacs vendus directement dans l'exploitation agricole, 80% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.
- Parmi les sacs vendus dans des supermarchés, 10% contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.

On désigne par E l'événement "les sacs de pommes sont vendus sur l'exploitation" et par V l'événement "les sacs contiennent des pommes de variétés différentes".
On achète de façon aléatoire un sac de pommes.

1. Donner les valeurs de $P(E)$, $P(\overline{E})$, $P_E(V)$, $P_E(\overline{V})$, $P_{\overline{E}}(\overline{V})$ et $P_{\overline{E}}(V)$.
2. Calculer $P(V)$.
3. On constate que le sac de pommes contient des pommes de variétés différentes.
   Calculer la probabilité qu'il ait été acheté dans un supermarché.

Exercice 11 ($\star\star$)

Dans un magasin de CD, 5% des boîtes sont en mauvais état, 60% des boîtes abîmées contiennent un CD défectueux et 98% des boîtes en bon état contiennent un CD en bon état. Un client achète un CD. On note A l'événement "la boîte achetée est abîmée" et D l'événement "le CD acheté est défectueux".

1. Donner les valeurs de $P(A)$, $P(\overline{A})$, $P_A(D)$, $P_A(\overline{D})$, $P_{\overline{A}}(\overline{D})$ et $P_{\overline{A}}(D)$.
2. Calculer $P(D)$.
3. Le client constate que son CD est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté une boîte abîmée ?

Exercice 12 ($\star\star\star$)

Dans une population de 10000 personnes, il y a 45% de fumeurs et 35% de personnes atteintes de bronchite. De plus, 65% des personnes ayant une bronchite sont fumeurs.

1. On choisit une personne au hasard dans cette population. Calculer la probabilité des événements suivants :
   - E_1 : "la personne choisie fume et a une bronchite",
   - E_2 : "la personne choisie ne fume pas et a une bronchite",
   - E_3 : "la personne choisie ne fume pas et n'a pas de bronchite".
2. Fumer et avoir une bronchite sont-ils des événements indépendants ?
3. On choisit une personne au hasard parmi les fumeurs. Calculer la probabilité que cette personne ait une bronchite.

