7. Équations différentielles linéaires

L'illumination n'est que la vision soudaine, par l'esprit, d'une route lentement préparée.

Antoine de Saint-Exupéry.

En L1, vous avez étudié les suites réelles qui permettent de modéliser des phénomènes intervenant uniquement à la fin d'intervalles discrets comme l'évolution annuelle d'une population, le montant sur un livret d'épargne à la fin de chaque trimestre... Cependant, il existe des modèles dans lesquels il est plus naturel et logique de considérer le temps comme une variable continue. Par exemple lorsqu'on s'intéresse à une population au sein de laquelle les naissances et décès ne sont pas contraints par l'achèvement d'intervalles de temps. Pour mesurer ces situations où le temps est une variable continue, on utilise les équations différentielles.

7.1 Exemple introductif

L'augmentation des fonds sur un compte d'épargne qui rapporte annuellement des intérêts au taux r satisfait l'équation :

$$y(t+1) = (1+r)y(t)$$

ce qui peut se réécrire

$$\frac{y(t+1)-y(t)}{y(t)} = r.$$

Si les intérêts sur le compte sont versés à chaque période Δt de l'année alors l'équation différentielle devient :

$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{y(t)} = r\Delta t.$$

Par exemple, les intérêts sont versés trimestriellement alors le montant sur le compte est multiplié par $1+\frac{1}{4}r$ à la fin de chaque trimestre. Certaines banques proposent des intérêts composées journaliers, dans ce cas $\Delta t = \frac{1}{365,25}$ et d'autres affichent des intérêts composés en continu, dans ce cas il faut faire tendre Δt vers 0.
Réécrivons l'équation précédente comme suit :

$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} = ry(t).$$

Si Δt tend vers 0, nous obtenons *l'équation différentielle* : $\quad y'(t) = ry(t)$.

7.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Définition 7.1 Soient a et b deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre un**, une équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$y'(t)+a(t)y(t) = b(t) \quad \text{(E)}$$

- La fonction $t \mapsto y(t)$ est l'inconnue de cette équation.
- La fonction $t \mapsto b(t)$ s'appelle le second membre de l'équation différentielle.
- Une équation différentielle est dite **homogène** lorsque son second membre est nul.

On appelle **solution** de l'équation différentielle (E) toute fonction $y : t \mapsto y(t)$ qui est dérivable sur I et qui vérifie l'équation (E) pour tout $t \in I$.

Exemple 7.1 Reprenons l'exemple introductif, l'équation différentielle

$$y'(t) - ry(t) = 0$$

est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant $(a(t) = r \in \mathbb{R})$ homogène (son second membre est nul).

Exemple 7.2 La fonction $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 2e^{-3t} \end{array}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(t)+3y(t) = 0$.

7.2.1 Équations homogènes

Théorème 7.1 (Équation différentielle $y' + ky = 0$ avec $k \in \mathbb{R}$) Soit $k \in \mathbb{R}^*$ une constante. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(t) + ky(t) = 0$ sont les fonctions

$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-k \times t} \end{array} \right. \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple 7.3 Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'(t) - 2y(t) = 0$.

Théorème 7.2 (Équation différentielle $y' + a(t)y = 0$) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit a une fonction définie et continue sur I. On note A une primitive de a sur I. Les solutions sur I de l'équation différentielle $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ sont toutes les fonctions

$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} \end{array} \right. \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Démonstration.

$\square$

Exemple 7.4 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'(t) + t^2 y(t) = 0$.

Exemple 7.5 Résoudre sur $]1;+\infty[$ l'équation différentielle

$$y'(t) + \frac{1}{t-1} y(t) = 0 \qquad (E)$$

7.2.2 Équations avec second membre

Théorème 7.3 **(Équation différentielle $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$)** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soient a et b deux fonctions définies et continues sur I et y_{part} une solution particulière de l'équation $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$. En notant A une primitive de a sur I, les solutions sur I de l'équation différentielle $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ sont toutes les fonctions de la forme

$$y_{\text{part}} + \lambda\, e^{-A} \qquad \text{avec} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Solution générale de l'équation complète = Solution particulière + Solution générale de l'équation **HOMOGÈNE**

Exemple 7.6 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'(t) - ty(t) = 2t \qquad (E)$$

7.2.3 Méthode de variation de la constante

Il n'est pas toujours facile de déterminer une solution particulière d'une équation différentielle. On peut utiliser la **méthode de variation de la constante** (due à Lagrange).

Soient a et b deux fonctions définies et continues sur I et (E) l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \ : \qquad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

On cherche une solution particulière de (E) en reprenant la forme d'une solution h_λ de l'équation homogène associée ($y' + a(t)y = 0$) et en remplaçant λ par une fonction g dérivable sur I : on recherche une solution particulière y_{part} sous la forme

$$y_{\text{part}} : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & g(t)\mathrm{e}^{-A(t)} \end{cases}$$

où A désigne une primitive de la fonction a et où g est une fonction dérivable sur I à déterminer.

Proposition 7.1 (Existence de solution pour les équadiffs linéaires d'ordre 1) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a et b deux fonctions définies et continues de I.
L'équation différentielle $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ possède au moins une solution sur I.

Remarque : Notons que la méthode de variation de la constante ne fournit pas toujours une solution particulière explicite: il faut pour cela être capable de déterminer deux primitives à l'aide des fonctions usuelles (une primitive A de a et une primitive de la fonction $t \mapsto b(t)\mathrm{e}^{A(t)}$)

Exemple 7.7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y'(t) + t^2 y(t) = t^2.$$

Attention ! Ne pas dire que l'on cherche LA solution particulière. Il y a, en fait, une infinité. On cherche donc **UNE** solution particulière.

Exemple 7.8 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'(t) - t^2 y(t) = \dfrac{t\mathrm{e}^{t^3/3}}{\sqrt{1+t^2}}$.

7.2.4 Problème de Cauchy

Retour sur l'exemple introductif

La somme d'argent sur un compte d'épargne qui rapporte en continu des intérêts au taux r est décrite par l'équation différentielle :

$$y'(t) - ry(t) = 0.$$

Les résultats mathématiques que l'on vient de voir nous permettent d'affirmer que les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$y : t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{rt} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, la somme sur le compte d'épargne augmente exponentiellement sans arrêt. Ici nous pouvons mieux nous rendre compte du rôle que joue la constante λ. Connaître le taux auquel le montant du compte augmente n'est pas suffisant pour déterminer la somme d'argent sur le compte à n'importe quel moment. Nous avons également besoin de connaître le montant du dépôt initial.
Pour la solution $y(t) = \lambda \mathrm{e}^{rt}$, on a $y(0) = \lambda$, autrement dit, le montant du dépôt initial est égal à la constante d'intégration.

Résultat général

Définition 7.2 Avec les notations de la définition 7.1, on appelle **condition de Cauchy** toute condition imposant la valeur d'une solution ou de l'une de ses dérivées en un point de I.

Proposition 7.2 (Solution au problème de Cauchy) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a et b deux fonctions définies et continues sur I, soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}R$.
Sous la condition de Cauchy $y(t_0) = y_0$, l'équation (E) : $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ admet une **unique solution** sur I.

Exemple 7.9 Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) + t^2 y(t) = t^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Exemple 7.10 Résoudre sur $]1,+\infty[$ le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) + \dfrac{1}{t-1} y(t) = 0 \\ y(3) = 3 \end{cases}$$

7.3 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Définition 7.3 Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b,c) \in \mathbb{R}^2$ des constantes, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie et continue sur I. On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants**, une équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t) \qquad \text{(E)}.$$

- La fonction $t \mapsto y(t)$ est l'inconnue de cette équation.
- La fonction $t \mapsto f(t)$ s'appelle le second membre de l'équation différentielle.
- Une équation différentielle est dite **homogène** lorsque son second membre est nul.

On appelle **solution** de l'équation différentielle (E) toute fonction $y : t \mapsto y(t)$ qui est deux fois dérivables sur I et qui vérifie l'équation (E) pour tout $t \in I$.

Exemple 7.11 La fonction $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 2e^t - e^{2t} \end{array}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$.

7.3.1 Équations homogènes

Théorème 7.4 A l'équation différentielle homogène :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \qquad \text{(EH)},$$

on associe l'équation caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad \text{(EC)}.$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le déterminant de (EC).

- Si $\Delta > 0$, on note r_1 et r_2 les racines réelles de l'équation (EC).
- Si $\Delta = 0$, on note r l'unique racine de (EC).
- Si $\Delta < 0$, on pose $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

Il existe alors deux constantes réelles C_1 et C_2 telle que la solution y de (EH) a pour expression :

- Si $\Delta > 0$,
$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$
- Si $\Delta = 0$,
$$y(t) = (C_1 + tC_2)e^{rt}$$
- Si $\Delta < 0$,
$$y(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$$

Exemple 7.12

1. Résoudre de l'équation différentielle

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0 \qquad \text{(E).}$$

2. Résoudre de l'équation différentielle

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0 \quad \text{(E).}$$

3. Résoudre de l'équation différentielle

$$y'' + 4y = 0 \quad \text{(E).}$$

4. Résoudre de l'équation différentielle

$$y''(t) + 2y'(t) + 10y(t) = 0 \quad \text{(E)}.$$

Exercice 7.1 Soit $x \mapsto u(x)$ une fonction d'utilité. Pour un niveau de richesse x quelconque, la *mesure absolue d'aversion face au risque d'Arrow-Pratt* $\mu(x)$ est définie par:

$$\mu(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)}.$$

Déterminer les fonctions d'utilité qui conduisent à une mesure absolue d'aversion face au risque constante.

7.3.2 Problème de Cauchy

Théorème 7.5 Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $(b,c) \in \mathbb{R}^2$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie et continue de I.
Pour tous $t_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, le *problème de Cauchy*

$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

possède une **unique** solution sur I.

Exemple 7.13 Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$(\mathrm{E}) \quad \begin{cases} y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

7.3.3 Équation avec second membre

Lorsqu'on doit déterminer une solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, on procède comme pour l'ordre 1. A savoir :

- On calcule la solution de l'équation homogène associée
- On détermine une solution particulière

La solution générale est alors la somme de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière.

Solution générale de l'équation complète	=	Solution particulière	+	Solution générale de l'équation **HOMOGÈNE**

Il n'est pas toujours simple de trouver une solution particulière. Dans le cas de l'ordre 2, vous serez guidés par l'énoncé de l'exercice.

Exemple 7.14 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 9t^2 \quad \text{(E)}.$$

On commence par résoudre l'équation homogène associée :

$$y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 0 \quad \text{(EH)}.$$

Exemple 7.15 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

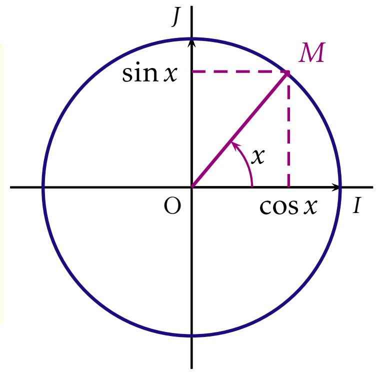
$$\text{(E)} : \quad y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 2\mathrm{e}^{-t}.$$

7.4 Complément sur les fonctions trigonométriques

Rappels sur le cercle trigonométrique

Définition 7.4 Soit x une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$ où M est un point du cercle trigonométrique.

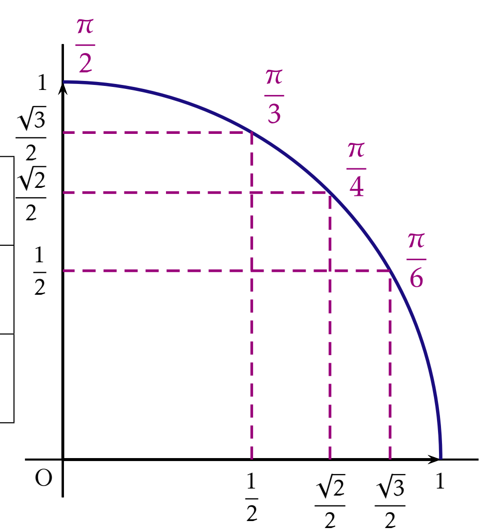
- Le cosinus de x, noté $\cos x$, est l'abscisse du point M.
- Le sinus de x, noté $\sin x$, est l'ordonnée du point M.



Propriété 7.1
- Pour tout réel x et pour tout entier relatif k, $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$
- Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- Pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Les fonctions cosinus et sinus

Propriété 7.2 **(Périodicité)** Pour tout réel x, $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$. On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques** de période 2π (on dit aussi 2π-périodiques).

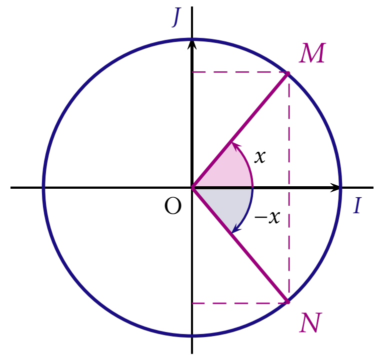
Remarque : La fonction cosinus (ou sinus) est entièrement connues dès qu'on connaît ses valeurs sur un intervalle $[a; a + 2\pi[$.

Propriété 7.3 (Parité)

- Pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$. On dit que la fonction cosinus est **paire**.
  Ainsi la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$. On dit que la fonction sinus est **impaire**.
  Ainsi la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Pour tout réel x :

$$\boxed{\begin{array}{c}\cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = \sin x\end{array}}$$

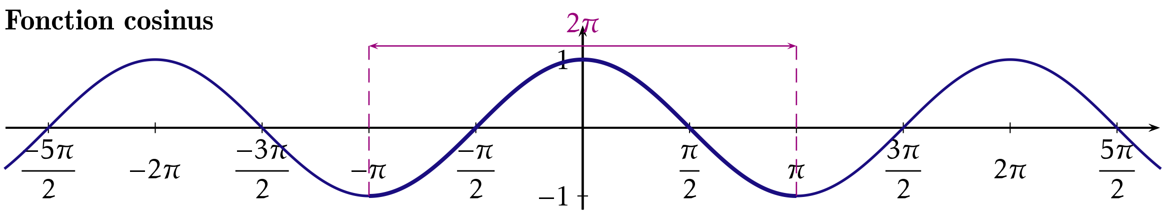


<u>Remarque</u> : Il suffit d'étudier les fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle $[0;\pi]$ *pour les connaître sur* $[-\pi;\pi]$ *à l'aide de la parité et enfin sur* $\mathbb{R}$ *à l'aide de la périodicité.*

Propriété 7.4 (Dérivées)

- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.
- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$.

Fonction cosinus



Fonction sinus