7. Introduction à l'algèbre linéaire

7.1 Résolution de systèmes linéaires 2

7.1.1 Définition et exemples

7.1.2 Système triangulaire

7.1.3 Méthode du pivot de Gauss

7.2 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ 6

7.2.1 Les exemples de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

7.2.2 Généralisation pour $\mathbb{R}^n$ avec $n \geqslant 2$

7.2.3 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

7.3 Base d'un espace vectoriel 10

7.3.1 Combinaison linéaire

7.3.2 Famille libres et génératrices

7.3.3 Base d'un espace vectoriel

7.4 Applications linéaires et produit scalaire 15

7.4.1 Applications linéaires

7.4.2 Produit scalaire

Faire des mathématiques, c'est donner
le même nom à des choses différentes

Henri Poincaré

Beaucoup de problèmes mathématiques, physiques ou économiques, vérifient la propriété suivante : « si u et v sont solutions alors $u + v$ est aussi solution, ainsi que ku où k est un réel. »
De tels problèmes sont dits linéaires et ils sont souvent plus faciles à résoudre que les problèmes plus généraux dits non-linéaires. C'est pourquoi a été introduite la notion d'espace vectoriel qui permet de définir un cadre rigoureux à de tels phénomènes.
La notion d'espace vectoriel est une structure fondamentale des mathématiques modernes. L'intérêt de ce concept est de dégager les propriétés communes que partagent ces ensembles pourtant très différents. Le nom provient de l'ensemble le plus simple à visualiser, celui des vecteurs du plan.
Par exemple, on peut additionner deux vecteurs du plan et aussi multiplier un vecteur par un réel (pour "l'agrandir", le "rétrécir" ou le "faire changer de sens" si ce réel est négatif). Dans tous les cas, le résultat de ces opérations sera encore un vecteur du plan.
L'objectif de ce chapitre est de définir les notions de bases de la théorie des espaces vectoriels sur des exemples simples ($\mathbb{R}^n$ pour $n = 2$ ou 3) pour donner une première approche de cette théorie très riche.

7.1 Résolution de systèmes linéaires

7.1.1 Définition et exemples

Exemple 7.1

Le système $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array}\right.$ est un système linéaire à deux équations et deux inconnues.

Le système $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 1 \\ -x & + & 7y & = & -25 \end{array}\right.$ est un système linéaire à deux équations et deux inconnues.

Le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 7 \\ -x & + & 7y & - & 3z & = & 8 \end{array}\right.$ est un système linéaire à trois équations et trois inconnues.

Le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 7 \end{array}\right.$ est un système linéaire à deux équations et trois inconnues.

Le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 7 \\ -x & + & 7y & - & 3z & = & 8 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$ est un système linéaire à quatre équations et trois inconnues.

Le système $\left\{\begin{array}{rcrcr} x^2 & + & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array}\right.$ n'est pas un système linéaire.

Le système $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & xy & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array}\right.$ n'est pas un système linéaire.

Définition 7.1 La i-ème équation d'un système linéaire (S) est notée L_i et s'appelle la i-ème **ligne** du système (S).
Résoudre le système (S), c'est déterminer tous les p-uplets $(x_1, \ldots, x_p)$ vérifiant les n équations du système.

Exemple 7.2

- Le système suivant est un système de deux équations à deux inconnues.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 1 \\ x & - & y & = & -4 \end{array}\right.$$

Le couple $(-1,3)$ en est une solution car on a $2\times(-1)+3 = -2+3 = 1$ et $-1-3 = -4$.

- Le système suivant est un système de trois équations à trois inconnues.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 5z & = & 0 \\ x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ 3x & - & 2y & + & 6z & = & 0 \end{array}\right.$$

On note que le triplet $(0,0,0)$ est solution évidente, mais il peut y en avoir d'autres...

Remarque :

- *Il ne faut pas croire qu'un système linéaire admet* **toujours** *une* **unique** *solution ! En effet, certains systèmes linéaires admettent une infinité de solutions et d'autres n'admettent aucune solution.*
- *En pratique, on rencontre principalement des systèmes de deux équations à deux inconnues ou bien des systèmes de trois équations à trois inconnues.*

Définition 7.2 On dit que deux systèmes (S) et (S') sont **équivalents** si ils ont les mêmes solutions.

7.1.2 Système triangulaire

Exemple 7.3 Les systèmes suivants sont des systèmes triangulaires

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 0 \\ & & -y & = & 2 \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & -2 \\ & & -2y & + & 3z & = & 3 \\ & & & & 2z & = & 6 \end{array}\right.$$

La résolution des systèmes triangulaires est très simple. On trouve la dernière inconnue grâce à la dernière équation, puis on trouve les autres inconnues successivement en remontant d'équation en équation.

Exemple 7.4 Résoudre le second système triangulaire ci-dessus.

La dernière équation me permet d'obtenir

$$z = \frac{6}{2} = 3.$$

En remplaçant z dans la deuxième équation, j'obtiens

$$-2y + 3 \times 3 = 3 \iff -2y + 9 = 3 \iff -2y = -6 \iff y = \frac{-6}{-2} = 3.$$

Enfin, en remplaçant y et z dans la première équation, j'obtiens

$$x + 3 - 2 \times 3 = -2 \iff x - 3 = -2 \iff x = -2 + 3 = 1.$$

Ainsi la solution du système est $(1, 3, 3)$.

7.1.3 Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss est un procédé algorithmique qui permet de passer d'un système linéaire de n équations à n inconnues quelconque à un système triangulaire équivalent en utilisant uniquement des opérations dites **élémentaires** sur les lignes du système.

Opérations élémentaires sur les lignes

Définition 7.3 Les opérations suivantes sur les lignes d'un système linéaire (S) sont appelées **opérations élémentaires**.

- $L_i \leftrightarrow L_j$: échange de deux lignes.
- $L_i \leftarrow aL_i$: remplacement d'une ligne par son produit par un réel **non nul** a.
- $L_i \leftarrow L_i + bL_j$: remplacement d'une ligne par sa somme avec un multiple d'une autre ligne.
- $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$: regroupement en une opération des deux opérations précédentes.

Proposition 7.1 Si on transforme un système à l'aide d'***UNE*** opération élémentaire, on obtient un système équivalent.

Attention ! Il est très important de n'appliquer qu'***UNE*** opération élémentaire à la fois. Sinon on peut ne pas obtenir un système équivalent.

Exemple 7.5

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 7y & + & 11z & = & 1 \\ -x & + & 12y & - & 19z & = & 2 \\ & & -3y & + & 5z & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 7y & + & 11z & = & 1 \\ & & 5y & - & 8z & = & 3 \\ & & -3y & + & 5z & = & 3 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

Mise en oeuvre du pivot de Gauss sur un exemple

Exemple 7.6 Résoudre le système suivant.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & -y & + & 2z & = & 7 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & -4 \end{array}\right.$$

Première étape : Il faut que la première ligne contienne la première inconnue (ici x). Si ce n'est pas le cas, on échange la première ligne avec une autre ligne qui contient x (avec, si possible, le coefficient 1 ou -1 pour simplifier les calculs suivants).

Ici, j'échange donc les lignes L_1 et L_3. Le système devient

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 1 \\ & & -y & + & 2z & = & 7 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftrightarrow L_3$$

Puis à l'aide des autres opérations élémentaires, on fait "disparaître" la première inconnue dans les autres lignes. En d'autres termes, on "nettoie" la première colonne des x.

Je commence par supprimer le terme en x dans la deuxième ligne, en retirant $2L_1$ à L_2.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ & & y & + & 6z & = & 9 \\ & & -y & + & 2z & = & 7 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

Puis je supprime le x dans la troisième ligne : je n'ai rien à faire ici.

Deuxième étape : Il faut que la deuxième équation contienne la deuxième inconnue (ici y). Si ce n'est pas le cas, on échange la deuxième ligne avec une autre ligne contenant y (avec, si possible, le coefficient 1 pour simplifier les calculs suivants), **mais sans utiliser la ligne** L_1.

Ici je n'ai rien à faire : la deuxième ligne contient déjà y.

Puis à l'aide des autres opérations élémentaires, on fait "disparaître" la deuxième inconnue dans les autres lignes. En d'autres termes, on "nettoie" la deuxième colonne des y.

Il me suffit ici d'additionner L_2 à L_3 pour faire disparaître le terme en y de L_3.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -4 \\ & & y & + & 6z & = & 9 \\ & & & & 8z & = & 16 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

Troisième étape: On obtient alors un système triangulaire que l'on sait résoudre.

La troisième équation me donne

$$z = \frac{16}{8} = 2.$$

En remplaçant z dans la deuxième équation, j'obtiens

$$y + 6 \times 2 = 9 \iff y + 12 = 9 \iff y = 9 - 12 = -3.$$

Enfin, en remplaçant y et z dans la première ligne, j'obtiens

$$x - 3 - 2 = -4 \iff x - 5 = -4 \iff x = -4 + 5 = 1.$$

Ainsi l'unique solution du système est $(1, -3, 2)$.

7.2 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

7.2.1 Les exemples de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

L'exemple de $\mathbb{R}^2$

Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{R}$, on définit deux opérations :

- l'addition de deux vecteurs

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbb{R}^2$$

- la multiplication par un scalaire

$$k \cdot x = (kx_1, kx_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple 7.7

- $(1,2) + (3,4) = (4,6)$
- $-2(7,-4) = (-14,8)$
- $-2(-1,3) + 4(6,0) = (26,-6)$

Interprétation géométrique : Lien avec la notion de vecteurs vue au lycée

L'exemple de $\mathbb{R}^3$

Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ et $k \in \mathbb{R}$, on définit deux opérations :

- l'addition de deux vecteurs

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in \mathbb{R}^3$$

- la multiplication par un scalaire

$$k \cdot x = (kx_1, kx_2, kx_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Exemple 7.8
- $(1,0,2)+(-1,-3,4)=$ $(0,-3,6)$
- $-2(1,3,-9)=$ $(-2,-6,18)$
- $-2(1,0,0)-5(2,2,2)=$ $(-12,-10,-10)$

Interprétation géométrique : Lien avec la notion de vecteurs vue au lycée

7.2.2 Généralisation pour $\mathbb{R}^n$ avec $n \geqslant 2$

Pour $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, $k\in\mathbb{R}$, on définit deux opérations :

- l'addition de deux vecteurs

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)+(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)\in\mathbb{R}^n$$

- la multiplication par un scalaire

$$k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Ces deux opérations vérifient une dizaine de propriétés (qu'on ne détaillera pas ici).

Définition 7.4 L'espace $\mathbb{R}^n$ muni des deux opérations précédentes est appelé un **espace vectoriel**.
Le vecteur $(0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^n$ et il est appelé **vecteur nul**.

7.2.3 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Exemple 7.9 On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et on considère deux sous-espaces:
- $F_1=\{(x_1,x_2,0)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1\in\mathbb{R},x_2\in\mathbb{R}\}$
- $F_2=\{(x_1,x_2,1)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1\in\mathbb{R},x_2\in\mathbb{R}\}$

F_1 et F_2 sont deux plans de $\mathbb{R}^3$ qui sont parallèles entre eux.

1. L'élément obtenu par addition de deux éléments de F_1 est-il dans F_1 ?
   Soient $(x_1, x_2, 0) \in F_1$ et $(y_1, y_2, 0) \in F_1$, on a :
   $$(x_1, x_2, 0) + (y_1, y_2, 0) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0) \in F_1$$
   F_1 est donc stable par addition.
2. L'élément obtenu par addition de deux éléments de F_2 est-il dans F_2 ?
   $(1, 2, 1) \in F_2$ et $(-1, 3, 1) \in F_2$ et on a :
   $$(1, 2, 1) + (-1, 3, 1) = (0, 5, 2) \notin F_2.$$
   F_2 n'est pas stable par addition.

Théorème 7.1 On appelle **sous-espace vectoriel de** $\mathbb{R}^n$ un espace F qui vérifie les trois poins suivants :

- $F \subset \mathbb{R}^n$
- $F \neq \emptyset$
- $\forall x \in F,\ \forall y \in F,\ \forall k \in \mathbb{R},\ kx + y \in F$

Exemple 7.10 Montrons que l'espace F_1 défini dans l'Exemple 7.9 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- On a clairement $F_1 \subset \mathbb{R}^3$.
- On remarque que $(0, 0, 0) \in F_1$ donc $F_1 \neq \emptyset$.
- Soient $(x_1, x_2, 0) \in F_1$ et $(y_1, y_2, 0) \in F_1$, $k \in \mathbb{R}$ on a :
  $$k(x_1, x_2, 0) + (y_1, y_2, 0) = (kx_1 + y_1, kx_2 + y_2, 0) \in F_1$$

F_1 est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Remarque : Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ contient le vecteur nul.

Retour sur l'espace F_2 défini à l'Exemple 7.9.

Comme $(0, 0, 0) \notin F_2$, F_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice type 7.1 Montrer que $F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On applique le Théorème 7.1 pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- On a clairement $F \subset \mathbb{R}^3$.
- $2 \times 0 + 0 - 0 = 0$ donc $(0,0,0) \in F$. Ainsi $F \neq \emptyset$.
- Soient $X = (x_1, x_2, x_3) \in F$, $Y = (y_1, y_2, y_3) \in F$ et $k \in \mathbb{R}$. On a :

$$kX + Y = (kx_1 + y_1, kx_2 + y_2, kx_3 + y_3) = (z_1, z_2, z_3).$$

Calculons $2z_1 + z_2 - z_3$, on a :

$$\begin{aligned} 2z_1 + z_2 - z_3 &= 2(kx_1 + y_1) + (kx_2 + y_2) - (kx_3 + y_3) \\ &= k(2x_1 + x_2 - x_3) + 2y_1 + y_2 - y_3 \\ &= k \times 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $kX + Y \in F$. Nous venons donc de démontrer que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7.1 Pourquoi les ensembles suivants ne sont-ils pas des espaces vectoriels?

1. $J = \emptyset$. Par définition, un espace vectoriel est non vide.
2. $K = \{(x,y) \quad | \quad x + y = 1\}$. $0 + 0 \neq 1$ donc $(0,0) \notin K$
3. $L = \{(x,y) \quad | \quad x \geqslant 0\}$. Soit $X = (1,2) \in L$, soit $k = -1 \in \mathbb{R}$, $kX = (-1,-2) \notin L$.

Interprétation géométrique :

Les droites vectorielles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. Une droite affine n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ ($(0,0)$ n'appartient pas à cet espace).

Les plans vectoriels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Un plan affine n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ ($(0,0,0)$ n'appartient pas à cet espace).

7.3 Base d'un espace vectoriel

Dans tout ce paragraphe, $E = \mathbb{R}^n$ ou bien désigne un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

7.3.1 Combinaison linéaire

Définition 7.5 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle **famille** de vecteurs de E tout p-uplet $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ formé de p vecteurs de E.

Exemple 7.11 Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soit $x = (1, -\frac{1}{2}, 2) \in E$ et $y = (1, 2, 0) \in E$.
Alors (x, y) est une famille de vecteurs de E.

Définition 7.6 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille de p vecteurs de E.
On dit qu'un vecteur x de E est **combinaison linéaire** des p vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_p$ s'il existe p réels $k_1, k_2, \dots, k_p$ tels que:

$$x = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \cdots + k_p e_p = \sum_{i=1}^{p} k_i e_i$$

Les scalaires k_i sont appelés les **coefficients** de la combinaison linéaire.

Exemple 7.12 Le vecteur $(5, 6, 9) \in \mathbb{R}^3$ est une combinaison linéaire des vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. En effet,

$$(5, 6, 9) = 5e_1 + 6e_2 + 9e_3.$$

Remarque : *Le vecteur nul* $(0, \dots, 0)$ *est combinaison linéaire de n'importe quels autres vecteurs.*

Méthode 7.1 (Pour vérifier que x est combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$)

1. On peut en trouver une à l'oeil ou grâce à une astuce.
2. Sinon, on procède par identification pour trouver les k_i et on résout le système linéaire correspondant.

Attention, il est possible de ne pas trouver de combinaison linéaire !

Exercice type 7.2 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $e_1 = (-1,2,0)$, $e_2 = (-3,5,1)$ et $e_3 = (0,1,-2)$.
Montrer que $x = (1,-1,1)$ est combinaison linéaire des vecteurs de la famille (e_1, e_2, e_3).

x est combinaison linéaire de la famille (e_1, e_2, e_3) si et seulement si il existe $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3.$$

Cette relation s'écrit :

$$(1,-1,1) = k_1(-1,2,0) + k_2(-3,5,1) + k_3(0,1,-2)$$

Cela est équivalent au système :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -k_1 & - & 3k_2 & & & = & 1 \\ 2k_1 & + & 5k_2 & + & k_3 & = & -1 \\ & & k_2 & - & 2k_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

$L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2$

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -k_1 & - & 3k_2 & & & = & 1 \\ & - & k_2 & + & k_3 & = & 1 \\ & & k_2 & - & 2k_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

$L_3 \leftarrow L_2 + L_3$

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -k_1 & - & 3k_2 & & & = & 1 \\ & - & k_2 & + & k_3 & = & 1 \\ & & & - & k_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

Le système est alors triangulaire et on sait le résoudre :

$$k_3 = -2, \quad k_2 = k_3 - 1 = -3, \quad k_1 = -3k_2 - 1 = 8.$$

On vérifie bien que $8e_1 - 3e_2 - 2e_3 = x$.

7.3.2 Famille libres et génératrices

Définition 7.7 Soit F un sous-espace vectoriel de E et soient $e_1, e_2, \ldots, e_p$ des vecteurs de F.
On dit que la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une **famille génératrice** de F si tout vecteur de F peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_p$:
Pour tout $x \in F$, il existe p réels $(k_1, k_2, \ldots, k_p)$ tels que

$$x = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \cdots + k_p e_p.$$

Attention ! Rien n'assure l'unicité des coefficients $k_1, k_2, \ldots, k_p$ c'est à dire l'unicité de l'écriture du vecteur x comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_p$: une condition supplémentaire est nécessaire. (voir section suivante)

Exemple 7.13 Reprenons le sous-espace vectoriel F_1 de l'Exemple 7.9. On a :

$$F_1 = \{(x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

La famille $((1, 0, 0), (0, 1, 0)$ est génératrice de F_1 car tout élément de F_1 s'écrit combinaison linéaire de $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$.

Exercice 7.2 Déterminer une famille génératrice de

$$H = \left\{(a + b + 2c, a + c, b + c) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad a, b, c \in \mathbb{R}\right\}.$$

On a :

$$H = \{a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1) + c(2, 1, 1) \quad | \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Une famille génératrice de H est donc donnée par $((1, 1, 0), (1, 0, 1), (2, 1, 1))$.

Proposition 7.2 Les opérations suivantes transforment une famille génératrice en une nouvelle famille génératrice:

- Échanger l'ordre des vecteurs de la famille,
- Enlever un vecteur nul,
- Enlever un vecteur qui apparaît deux fois,
- Enlever un vecteur qui est combinaison linéaire d'autres vecteurs de la famille,
- Multiplier un vecteur par une constante non nulle,

Exemple 7.14 Reprenons l'espace H de l'Exercice 7.2.

On remarque que :

$$(2, 1, 1) = (1, 1, 0) + (1, 0, 1).$$

Ainsi la famille $((1, 1, 0), (1, 0, 1)$ est génératrice de H.

Définition 7.8 Soit F un sous-espace vectoriel de E et soient $e_1, e_2, \ldots, e_p$ des vecteurs de F.
On dit que la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une **famille libre** de F si aucun vecteur n'est combinaison linéaire d'autres vecteurs de la famille, c'est-à-dire si:

Pour tout p réels $(k_1, k_2, \ldots, k_p)$ vérifiant $k_1 e_1 + k_2 e_2 + \cdots + k_p e_p = 0_E$, on a nécessairement

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_p = 0.$$

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Exemple 7.15 Etudions la liberté des familles de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

1. $((1,0),(1,1))$

   Soit $(k,l) \in \mathbb{R}^2$ tel que $k(1,0)+l(1,1)=(0,0)$.
   Alors $k+l=0$ et $l=0$.
   On en déduit que $k=l=0$. Ainsi la famille est libre.

2. $((1,2),(3,6))$

   On remarque que $3(1,2)-(3,6)=(0,0)$. La famille est donc liée.

Exercice 7.3 La famille $\big((1,0,1),(-1,3,0),(0,1,2)\big)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^3$?

Soit les réels k_1, k_2, k_3 tels que $k_1(1,0,1)+k_2(-1,3,0)+k_3(0,1,2)=0$. A-t-on $k_1=k_2=k_3=0$?

$$k_1(1,0,1)+k_2(-1,3,0)+k_3(0,1,2)=0 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} k_1 & - & k_2 & & & = & 0 \\ & & 3k_2 & + & k_3 & = & 0 \\ k_1 & & & + & 2k_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

On essaie de se ramener à un système triangulaire en faisant $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. On obtient

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} k_1 & - & k_2 & & & = & 0 \\ & & 3k_2 & + & k_3 & = & 0 \\ & & k_2 & + & 2k_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Puis on fait $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} k_1 & - & k_2 & & & = & 0 \\ & & 3k_2 & + & k_3 & = & 0 \\ & & & & 5k_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Le système obtenu est maintenant triangulaire et il est facile à résoudre.
On obtient rapidement $k_1=0$ et $k_2=0$.
En conclusion, $k_1=k_2=k_3=0$ donc la famille est libre.

Proposition 7.3 Soit E un espace vectoriel. Une famille $(e_1,e_2,\dots,e_p)$ est liée si et seulement si au moins un des vecteurs de cette famille peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Remarque : En particulier :

1. *Une famille dont l'un des vecteurs est nul est liée car* si $e_1=0_E$, $e_1=0e_2+\ldots+0e_p$.
2. *Une famille contenant deux fois le même vecteur est liée.*
3. *Une famille formée d'un seul vecteur non nul est libre.*
4. *Une famille (e_1,e_2) est liée si et seulement si e_1 et e_2 sont colinéaires.*
   Deux vecteurs e_1 et e_2 sont dits ***colinéaires*** *si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $e_1=ke_2$.*

Méthode 7.2 (Comment montrer qu'une famille U est libre?)

1. Si U comprend un unique élément u, il suffit de montrer que $u \neq 0$.
2. Si U est une famille à 2 éléments u et v, il suffit de montrer que u et v ne sont pas colinéaires.
3. Si la famille U comporte 3 éléments ou plus, on revient à la Définition 7.8 d'une famille libre.

Exemple 7.16

1. Justifier que la famille $((2,5))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.

   $(2,5) \neq (0,0)$ donc $(2,5)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.

2. Justifier que la famille $((1,2,3),(0,1,1))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

   $(1,2,3)$ et $(0,1,1)$ sont non colinéaires. Donc la famille $((1,2,3),(0,1,1))$ est libre.

7.3.3 Base d'un espace vectoriel

Définition 7.9 Soit F un sous-espace vectoriel de E et soient $e_1, e_2, \dots, e_p$ des vecteurs de F.
On dit que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une **base** de F si et seulement si tout $x \in F$ se décompose de manière **unique** sous forme d'une combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \dots, e_p)$.
Autrement dit si :

Pour tout $x \in F$, il existe un unique p-uplet de réels $(x_1, x_2, \dots, x_p)$, tel que

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots x_p e_p.$$

Ce p-uplet représente les coordonnées de x dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_p)$

Exemple 7.17 Dans $\mathbb{R}^2$, soient $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ alors la famille (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

En effet, soit $X = (a,b) \in \mathbb{R}^2$. On cherche un unique couple de réels (x,y) tel que $X = xe_1 + ye_2$. On a :

$$X = xe_1 + ye_2 \iff \begin{cases} x \cdot 1 + y \cdot 0 = a \\ x \cdot 0 + y \cdot 1 = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

X s'écrit donc de manière unique comme combinaison linéaire de (e_1, e_2) avec $X = ae_1 + be_2$. Donc (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 7.4 Soit F un sous-espace vectoriel de E et soient $e_1, e_2, \dots, e_p$ des vecteurs de F.
La famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une **base** de F si et seulement si $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est à la fois une famille **libre** et une famille **génératrice** de F.

Exemple 7.18 Reprenons le sous-espace H de $\mathbb{R}^3$ de l'Exercice 7.2. Déterminons une base de H.

On a montré précédemment que la famille $((1,1,0),(1,0,1))$ était une famille génératrice de H. Montrons qu'elle est libre.
Elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre.
Cette famille est libre et génératrice de H, c'est donc une base de H.

7.4 Applications linéaires et produit scalaire

7.4.1 Applications linéaires

Définition 7.10 On appelle **application linéaire** de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, toute application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ telle que:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{R} \quad f(kx+y) = kf(x) + f(y).$$

<u>Remarque</u> : Notons 0_n le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ et 0_m le vecteur nul de $\mathbb{R}^m$ alors pour f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, on a : $f(0_n) = 0_m$.

Exemple 7.19 Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires?

1. La fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par: $f((x,y)) = x + y + 1$.

   $f((0,0)) = 1 \neq 0$, donc f n'est pas une application linéaire.

2. La fonction g définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par: $g((x,y)) = x + y$.

   Soit (x,y) et (x',y') deux éléments de $\mathbb{R}^2$, et λ un réel.

   $g(\lambda(x,y) + (x',y')) = g((\lambda x + x', \lambda y + y')) = \lambda x + x' + \lambda y + y' = \lambda g((x,y)) + g((x',y'))$.

   Donc g est une application linéaire.

3. La fonction h définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par: $h((x,y)) = x \times y$.

   $h((0,1) + (1,0)) = h((1,1)) = 1 \neq 0 + 0 = h((0,1)) + h((1,0))$. Donc h n'est pas une application linéaire.

7.4.2 Produit scalaire

Définition 7.11 Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le **produit scalaire** de x et y qui s'écrit $x \cdot y$ est le nombre :

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Exemple 7.20 Si $x = (4, -1, 2)$ et $y = (6, 3, -4)$ alors :

$$x \cdot y = 4 \times 6 + (-1) \times 3 + 2 \times (-4) = 13$$

Interprétation géométrique dans $\mathbb{R}^2$

Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B), on rappelle que la distance entre les points A et B se calcule via la formule :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Définition 7.12 Soit $x = (x_1, x_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et soit le point M de coordonnées (x_1, x_2) et le point O de coordonnées $(0, 0)$. On définit la norme du vecteur x notée $||x||$ par :

$$||x|| = OM = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Soit $x = (x_1, x_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$, par définition du produit scalaire, on a :

$$x \cdot x = x_1^2 + x_2^2 = ||x||^2.$$

Par conséquent, on a la relation

$$||x|| = \sqrt{x \cdot x}.$$

Théorème 7.2 Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Soit θ l'angle formé entre eux. Alors:

$$u \cdot v = ||u||\,||v|| \cos(\theta).$$

<u>Remarque</u> : Si deux vecteurs u et v sont orthogonaux alors $u \cdot v = 0$.