6. Équations différentielles linéaires

> Il ne peut y avoir de langage plus universel et plus simple, plus exempt d'erreurs et d'obscurités, c'est-à-dire plus digne d'exprimer les rapports invariables des êtres naturels.
>
> Jean-Baptiste-Joseph Fourier

En L1, nous avons étudié les suites réelles qui permettent de modéliser des phénomènes intervenant uniquement à la fin d'intervalles discrets comme l'évolution annuelle d'une population, le montant sur un livret d'épargne à la fin de chaque trimestre... Cependant, il existe des modèles dans lesquels il est plus naturel et logique de considérer le temps comme une variable continue. Par exemple lorsqu'on s'intéresse à une population au sein de laquelle les naissances et décès ne sont pas contraints par l'achèvement d'intervalles de temps. Pour mesurer ces situations où le temps est une variable continue, on utilise les équations différentielles.

6.1 Exemple introductif

L'augmentation des fonds sur un compte d'épargne qui rapporte annuellement des intérêts au taux r satisfait l'équation :

$$y(t+1) = (1+r)y(t)$$

ce qui peut se réécrire

$$\frac{y(t+1)-y(t)}{y(t)} = r.$$

Si les intérêts sur le compte sont versés à chaque période Δt de l'année alors l'équation différentielle devient :

$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{y(t)} = r\Delta t.$$

Par exemple, les intérêts sont versés trimestriellement alors le montant sur le compte est multiplié par $1+\frac{1}{4}r$ à la fin de chaque trimestre. Certaines banques proposent des intérêts composées journaliers, dans ce cas $\Delta t = \frac{1}{365,25}$ et d'autres affichent des intérêts composés en continu, dans ce cas il faut faire tendre Δt vers 0.
Réécrivons l'équation précédente comme suit :

$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} = ry(t).$$

Si Δt tend vers 0, nous obtenons *l'équation différentielle* : $\quad y'(t) = ry(t)$.

6.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Définition 6.1 Soient a et b deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre un**, une équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \quad \text{(E)}$$

- La fonction $t \mapsto y(t)$ est l'inconnue de cette équation.
- La fonction $t \mapsto b(t)$ s'appelle le second membre de l'équation différentielle.
- Une équation différentielle est dite **homogène** lorsque son second membre est nul.

On appelle **solution** de l'équation différentielle (E) toute fonction $y : t \mapsto y(t)$ qui est dérivable sur I et qui vérifie l'équation (E) pour tout $t \in I$.

Exemple 6.1 Reprenons l'exemple introductif, l'équation différentielle

$$y'(t) - ry(t) = 0$$

est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant $(a(t) = r \in \mathbb{R})$ homogène (son second membre est nul).

Exemple 6.2 La fonction $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 2e^{-3t} \end{array}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(t) + 3y(t) = 0$.

En effet, y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$y'(t) + 3y(t) = -6e^{-3t} + 6e^{-3t} = 0.$$

6.2.1 Équations homogènes

Théorème 6.1 (Équation différentielle $y'+ky=0$ avec $k \in \mathbb{R}$) Soit $k \in \mathbb{R}^*$ une constante. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(t)+ky(t)=0$ sont les fonctions

$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda \,\mathrm{e}^{-k\times t} \end{array} \right. \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple 6.3 Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'(t)-2y(t)=0$.

A l'aide du théorème précédent, on peut affirmer que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définie sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$y : t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{2t} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Théorème 6.2 (Équation différentielle $y'+a(t)y=0$) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit a une fonction définie et continue sur I. On note A une primitive de a sur I. Les solutions sur I de l'équation différentielle $y'(t)+a(t)y(t)=0$ sont toutes les fonctions

$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda \,\mathrm{e}^{-A(t)} \end{array} \right. \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Démonstration.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $y : t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-A(t)}$ est bien solution de l'équation étudiée car pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} y'(t)+a(t)y(t) &= -\lambda A'(t)\mathrm{e}^{-A(t)} + a(t)\times\lambda\mathrm{e}^{-A(t)} \\ &= -\lambda a(t)\mathrm{e}^{-A(t)} + a(t)\times\lambda\mathrm{e}^{-A(t)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Réciproquement, si $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, solution de l'équation étudiée, alors on a :

$$\left(y\mathrm{e}^{A}\right)' = y'\mathrm{e}^{A} + yA'\mathrm{e}^{A} = (y'+ay)\mathrm{e}^{A} = 0$$

  Ainsi, la fonction $y\mathrm{e}^{A}$ est constante sur I. Autrement dit, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y\mathrm{e}^{A} = \lambda$, *i.e* $y = \lambda\mathrm{e}^{-A}$.

$\square$

Exemple 6.4 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'(t)+t^2y(t)=0$.

On pose la fonction a définie sur $\mathbb{R}$ par $a(t)=t^2$.
Alors une primitive de a sur $\mathbb{R}$ est donnée par $A : t \mapsto \dfrac{t^3}{3}$.
Donc les solutions de l'équation sont les fonctions :

$$f_\lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda \mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}} \end{array} \right. \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Donc l'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S} = \left\{ f_\lambda : t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}} \quad \middle| \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exemple 6.5 Résoudre sur $]1;+\infty[$ l'équation différentielle

$$y'(t)+\frac{1}{t-1}y(t)=0 \qquad (E)$$

On pose la fonction a définie sur $]1;+\infty[$ par $a(t)=\dfrac{1}{t-1}$.
Alors, une primitive de a sur $]1;+\infty[$ est $A : t \mapsto \ln(t-1)$.
Donc les solutions de (E) sont les fonctions

$$f_\lambda : \left\{ \begin{array}{ccc}]1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda \mathrm{e}^{-\ln(t-1)} \end{array} \right. \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Or, pour tout $t \in]1;+\infty[$, on a:

$$f_\lambda(t) = \frac{\lambda}{\mathrm{e}^{\ln(t-1)}} = \frac{\lambda}{t-1}.$$

Donc l'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S} = \left\{ f_\lambda : t \in]1;+\infty \mapsto \frac{\lambda}{t-1} \quad \middle| \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

6.2.2 Équations avec second membre

Théorème 6.3 **(Équation différentielle $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$)** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soient a et b deux fonctions définies et continues sur I et y_{part} une solution particulière de l'équation $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$. En notant A une primitive de a sur I, les solutions sur I de l'équation différentielle $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ sont toutes les fonctions de la forme

$$y_{\text{part}} + \lambda\, e^{-A} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Solution générale de l'équation complète $=$ Solution particulière $+$ Solution générale de l'équation **HOMOGÈNE**

Exemple 6.6 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'(t) - ty(t) = 2t \qquad (E)$$

1. **Résolution de l'équation homogène associée (EH):**

   $$y'(t) - ty(t) = 0 \qquad \text{(EH)}.$$

   On pose la fonction a définie sur $\mathbb{R}$ par $a(t) = -t$.

   Alors une primitive de a sur $\mathbb{R}$ est donnée par $A : t \mapsto -\dfrac{t^2}{2}$.

   Les solutions de (EH) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_\lambda : t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$

2. **Solution particulière:**
   On vérifie facilement que

   $$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -2 \end{cases}$$

   est une solution de (E).

3. **Conclusion :**
   Ainsi, d'après le théorème précédent, les solutions sont les fonctions

   $$g_\lambda : \begin{cases} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} - 2 \end{cases} \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

   L'ensemble des solutions est donc :

   $$\mathcal{S} = \left\{ g_\lambda : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} - 2 \quad | \quad \lambda \in \mathbb{R}. \right\}$$

6.2.3 Méthode de variation de la constante

Il n'est pas toujours facile de déterminer une solution particulière d'une équation différentielle. On peut utiliser la **méthode de variation de la constante** (due à Lagrange).

Soient a et b deux fonctions définies et continues sur I et (E) l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \ : \qquad y'(t)+a(t)y(t)=b(t)$$

On cherche une solution particulière de (E) en reprenant la forme d'une solution h_λ de l'équation homogène associée $(y'+a(t)y=0)$ et en remplaçant λ par une fonction g dérivable sur I : on recherche une solution particulière y_{part} sous la forme

$$y_{\text{part}} : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & g(t)\mathrm{e}^{-A(t)} \end{array} \right.$$

où A désigne une primitive de la fonction a et où g est une fonction dérivable sur I à déterminer.

Puisque g et A sont dérivables sur I, la fonction y_{part} est dérivable sur I et pour tout $t\in I$,

$$y_{\text{part}}'(t)=g'(t)\mathrm{e}^{-A(t)}-g(t)\mathrm{e}^{-A(t)}a(t).$$

Ainsi, pour tout $t\in I$,

$$y_{\text{part}}'(t)+a(t)y_{\text{part}}(t)=g'(t)\mathrm{e}^{-A(t)}-g(t)\mathrm{e}^{-A(t)}a(t)+a(t)g(t)\mathrm{e}^{-A(t)}=g'(t)\mathrm{e}^{-A(t)}.$$

On en déduit que:

$$\begin{aligned} y_{\text{part}} \text{ solution de } (E) &\iff \forall t\in I,\ g'(t)\mathrm{e}^{-A(t)}=b(t) \\ &\iff \forall t\in I,\ g'(t)=b(t)\mathrm{e}^{A(t)} \end{aligned}$$

Puisque les fonctions A et b sont continues sur I, la fonction $t\mapsto b(t)\mathrm{e}^{A(t)}$ l'est aussi, et par conséquent, elle admet des primitives sur I.
On est donc assuré qu'il existe une fonction g définie et dérivable sur I vérifiant : $\forall t\in I,\ g'(t)=b(t)\mathrm{e}^{A(t)}$.
Ceci démontre que l'équation (E) admet au moins une solution sur I.

Proposition 6.1 **(Existence de solution pour les équadiffs linéaires d'ordre 1)** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a et b deux fonctions définies et continues de I.
L'équation différentielle $y'(t)+a(t)y(t)=b(t)$ possède au moins une solution sur I.

Remarque : Notons que la méthode de variation de la constante ne fournit pas toujours une solution particulière explicite: il faut pour cela être capable de déterminer deux primitives à l'aide des fonctions usuelles (une primitive A de a et une primitive de la fonction $t\mapsto b(t)\mathrm{e}^{A(t)}$)

Exemple 6.7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y'(t) + t^2 y(t) = t^2.$$

On a résolu dans l'Exemple 6.4 l'équation homogène associée à cette équation différentielle. On a obtenu que les solutions de cette équation homogène étaient de la forme

$$y : t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pour déterminer une solution particulière, utilisons la méthode de variation de la constante et posons la fonction :

$$y_{part}(t) = g(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}}.$$

On a :

$$y'_{part}(t) = g'(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}} - t^2 g(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}}$$

ainsi

$$y'_{part}(t) + t^2 y(t) = g'(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}} - t^2 g(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}} + t^2 g(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}} = g'(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}}$$

Ainsi on a l'égalité :

$$g'(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}} = t^2$$

On cherche donc la fonction g telle que :

$$g'(t) = t^2 \mathrm{e}^{\frac{t^3}{3}}$$

Une primitive de $g'(t)$ est donnée par :

$$g(t) = e^{\frac{t^3}{3}}$$

On a donc trouvé une solution particulière :

$$y_{part}(t) = e^{\frac{t^3}{3}} \times \mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}} = 1$$

Ainsi les solutions de l'équation différentielle sont définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme :

$$y : t \in \mathbb{R} \mapsto 1 + \lambda \mathrm{e}^{-\frac{t^3}{3}} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Attention ! Ne pas dire que l'on cherche LA solution particulière. Il y a, en fait, une infinité. On cherche donc **UNE** solution particulière.

Exemple 6.8 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'(t) - t^2 y(t) = \dfrac{t e^{t^3/3}}{\sqrt{1+t^2}}$.

1. **Résolution de l'équation homogène associée (EH)** :
$$y'(t) - t^2 y(t) = 0 \quad \text{(EH)}$$
La fonction $t \mapsto -\dfrac{t^3}{3}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto -t^2$ donc les solutions de (EH) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $h_\lambda : t \mapsto e^{t^3/3}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. **Recherche d'une solution particulière de (E).**
On pose une fonction inconnue g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$y_{part} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & g(t)e^{t^3/3} \end{cases}$$
On cherche alors à déterminer g tel que y_{part} soit solution particulière de (E).
On a :
$$y'_{part}(t) = g'(t)e^{t^3/3} + g(t)t^2 e^{t^3/3}$$
donc
$$y'_{part}(t) - t^2 y_{part}(t) = g'(t)e^{t^3/3} + g(t)t^2 e^{t^3/3} - t^2 g(t)e^{t^3/3} = g'(t)e^{t^3/3}$$
Ainsi on cherche une fonction g telle que :
$$g'(t)e^{t^3/3} = \frac{t e^{t^3/3}}{\sqrt{1+t^2}}$$
i.e. telle que :
$$g'(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$
Une primitive de $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ est $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ donc
$$y_{part} : t \mapsto \sqrt{1+t^2}\, e^{\frac{t^3}{3}}$$
est une solution particulière de (E).

3. **Conclusion.**
Les solutions de (E) sont les fonctions
$$f_\lambda : t \in \mathbb{R} \mapsto (\sqrt{1+t^2} + \lambda)e^{t^3/3} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

6.2.4 Problème de Cauchy

Retour sur l'exemple introductif

La somme d'argent sur un compte d'épargne qui rapporte en continu des intérêts au taux r est décrite par l'équation différentielle :

$$y'(t) - ry(t) = 0.$$

Les résultats mathématiques que l'on vient de voir nous permettent d'affirmer que les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$y : t \mapsto \lambda e^{rt} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, la somme sur le compte d'épargne augmente exponentiellement sans arrêt. Ici nous pouvons mieux nous rendre compte du rôle que joue la constante λ. Connaître le taux auquel le montant du compte augmente n'est pas suffisant pour déterminer la somme d'argent sur le compte à n'importe quel moment. Nous avons également besoin de connaître le montant du dépôt initial.
Pour la solution $y(t) = \lambda e^{rt}$, on a $y(0) = \lambda$, autrement dit, le montant du dépôt initial est égal à la constante d'intégration.

Résultat général

Définition 6.2 Avec les notations de la définition 6.1, on appelle **condition de Cauchy** toute condition imposant la valeur d'une solution ou de l'une de ses dérivées en un point de I.

Proposition 6.2 (Solution au problème de Cauchy) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a et b deux fonctions définies et continues sur I, soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}R$.
Sous la condition de Cauchy $y(t_0) = y_0$, l'équation (E) : $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ admet une **unique solution** sur I.

Exemple 6.9 Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) + t^2 y(t) = t^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Dans l'Exemple 6.7, nous avons résolu l'équation différentielle (E) : $y'(t) + t^2 y(t) = t^2$. Nous avons montré que les solutions étaient de la forme :

$$f_\lambda : t \in \mathbb{R} \mapsto 1 + \lambda e^{-t^3/3} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer λ pour que la solution f_λ vérifie $f_\lambda(0) = 2$. On a :

$$f_\lambda(0) = 2 \iff 1 + \lambda = 2 \iff \lambda = 1$$

Ainsi ce problème de Cauchy admet une unique solution :

$$\mathcal{S} = \left\{ f : t \in \mathbb{R} \mapsto 1 + e^{-t^3+3}. \right\}$$

Exemple 6.10 Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t+\dfrac{1}{t-1}y(t)=0 \\ y(3)=3 \end{cases}$$

Dans l'Exemple 6.8, nous avons résolu l'équation différentielle (E) :$y'(t)+\dfrac{1}{t-1}y(t)=0$. Nous avons montré que les solutions étaient de la forme :

$$f_\lambda : t \in]1;+\infty[\mapsto \frac{\lambda}{t-1} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer λ pour que la solution f_λ vérifie $f_\lambda(3)=3$. On a :

$$f_\lambda(3)=3 \iff \frac{\lambda}{3-1}=3 \iff \lambda=6$$

Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy est

$$\mathcal{S}=\left\{g : t \in]1;+\infty[\mapsto \frac{6}{t-1}\right\}.$$

6.3 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Définition 6.3 Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b,c) \in \mathbb{R}^2$ des constantes, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie et continue sur I. On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants**, une équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$ay''(t)+by'(t)+cy(t)=f(t) \qquad \text{(E)}.$$

- La fonction $t \mapsto y(t)$ est l'inconnue de cette équation.
- La fonction $t \mapsto f(t)$ s'appelle le second membre de l'équation différentielle.
- Une équation différentielle est dite **homogène** lorsque son second membre est nul.

On appelle **solution** de l'équation différentielle (E) toute fonction $y : t \mapsto y(t)$ qui est deux fois dérivables sur I et qui vérifie l'équation (E) pour tout $t \in I$.

Exemple 6.11 La fonction $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 2e^t - e^{2t} \end{array}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''(t)-3y'(t)+2y(t)=0$.

En effet, y est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) &= 2\mathrm{e}^t - 4\mathrm{e}^{2t} - 3(2\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^{2t}) + 2(2\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{2t}) \\ &= 2\mathrm{e}^t - 4\mathrm{e}^{2t} - 6\mathrm{e}^t + 6\mathrm{e}^{2t} + 4\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^{2t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

6.3.1 Équations homogènes

Théorème 6.4 A l'équation différentielle homogène :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \qquad \text{(EH)},$$

on associe l'équation caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad \text{(EC)}.$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le déterminant de (EC).

- Si $\Delta > 0$, on note r_1 et r_2 les racines réelles de l'équation (EC).
- Si $\Delta = 0$, on note r l'unique racine de (EC).
- Si $\Delta < 0$, on pose $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

Il existe alors deux constantes réelles C_1 et C_2 telle que la solution y de (EH) a pour expression :

- Si $\Delta > 0$,
$$y(t) = C_1\mathrm{e}^{r_1 t} + C_2\mathrm{e}^{r_2 t}$$
- Si $\Delta = 0$,
$$y(t) = (C_1 + tC_2)\mathrm{e}^{rt}$$
- Si $\Delta < 0$,
$$y(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$$

Exemple 6.12 1. Résoudre de l'équation différentielle

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0 \qquad \text{(E)}.$$

L'équation caractéristique associée à (E) est la suivante :

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \quad \text{(EC)}$$

Le discriminant de ce polynôme de degré 2 vaut : $\Delta = 1$. Elle possède donc deux racines 1 et 2.

Ainsi d'après le théorème précédent, les solutions de (E) sont de la forme

$$y : t \longmapsto C_1 e^t + C_2 e^{2t}$$

avec C_1 et C_2 des constantes réelles.

2. Résoudre de l'équation différentielle

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0 \quad \text{(E)}.$$

L'équation caractéristique associée à (E) est la suivante :

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \quad \text{(EC)}$$

Le discriminant de ce polynôme de degré 2 vaut : $\Delta = 0$. Elle possède donc une unique solution 1. Ainsi d'après le théorème précédent, les solutions de (E) sont de la forme

$$y : t \longmapsto (C_1 t + C_2)e^t$$

avec C_1 et C_2 des constantes réelles.

3. Résoudre de l'équation différentielle

$$y'' + 4y = 0 \quad \text{(E)}.$$

L'équation caractéristique associée à (E) est la suivante :

$$r^2 + 4 = 0 \quad \text{(EC)}$$

Le discriminant de ce polynôme de degré 2 vaut : $\Delta = -16 < 0$. Posons $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$. D'après les théorème précédent, les solutions de (E) sont de la forme

$$y : t \longmapsto C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$$

avec C_1 et C_2 des constantes réelles.

4. Résoudre de l'équation différentielle

$$y''(t) + 2y'(t) + 10y(t) = 0 \quad \text{(E)}.$$

L'équation caractéristique associée à (E) est la suivante :

$$r^2 + 2r + 10 = 0 \quad \text{(EC)}$$

Le discriminant de ce polynôme de degré 2 vaut : $\Delta = -36$. Posons $\alpha = \frac{-2}{2} = -1$ et $\beta = \frac{\sqrt{36}}{2} = 3$. D'après les théorème précédent, les solutions de (E) sont de la forme

$$y :\longmapsto e^{-t}(C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t))$$

avec C_1 et C_2 des constantes réelles.

6.3.2 Problème de Cauchy

Théorème 6.5 Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $(b,c) \in \mathbb{R}^2$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie et continue de I.
Pour tous $t_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, le *problème de Cauchy*

$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

possède une **unique** solution sur I.

Exemple 6.13 Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\text{(E)} \quad \begin{cases} y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

L'équation caractéristique associée à (E) est la suivante :

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \text{(EC)}$$

Le discriminant de ce polynôme de degré 2 vaut : $\Delta = 9$. Elle possède donc deux racines -1 et 2.

Ainsi d'après le Théorème 6.4, les solutions de (E) sont de la forme

$$y : t \longmapsto C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 \mathrm{e}^{2t}$$

avec C_1 et C_2 des constantes réelles.
Il nous reste à déterminer les constantes C_1 et C_2 pour que la solution y vérifie $y(0) = 3$ et $y'(0) = 3$.
On a, d'une part :

$$y(0) = 3 \iff C_1 + C_2 = 3.$$

D'autre part, comme $y'(t) = -C_1 \mathrm{e}^{-t} + 2C_2 \mathrm{e}^{2t}$, on a :

$$y'(0) = 0 \iff -C_1 + 2C_2 = 0.$$

On est donc ramené à résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} C_1 & + & C_2 & = & 3 \\ -C_1 & + & 2C_2 & = & 0 \end{cases}$$

La deuxième ligne nous donne $C_1 = 2C_2$, si on remplace dans la première ligne, on obtient : $3C_2 = 3$ donc $C_2 = 1$. On en déduit que $C_1 = 2$. L'unique solution de (E) est donc :

$$y : t \in \mathbb{R} \longmapsto 2\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2t}.$$

Exercice 6.1 Soit $x \mapsto u(x)$ une fonction d'utilité. Pour un niveau de richesse x quelconque, la *mesure absolue d'aversion face au risque d'Arrow-Pratt* $\mu(x)$ est définie par:

$$\mu(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)}.$$

Déterminer les fonctions d'utilité qui conduisent à une mesure absolue d'aversion face au risque constante.

Pour trouver les fonctions d'utilité qui conduisent à une mesure absolue d'aversion face au risque **constante**, nous sommes amenés à résoudre l'équation différentielle du second ordre :

$$\frac{-u''(x)}{u'(x)} = a \quad \text{où} \quad a \text{ est une constante.}$$

Cette équation différentielle se réécrit :

$$u''(x) + au'(x) = 0.$$

Nous avons maintenant les outils pour résoudre ce type d'équations différentielles. L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 + ar = 0 \quad \text{(EC)}.$$

Son discriminant vaut $\Delta = a^2$ donc elle possède deux racines 0 et $-a$. Les solutions de (E) sont donc de la forme :

$$u : x \longmapsto C_1 + C_2 e^{ax}$$

avec C_1 et C_2 des constantes.
En conclusion, les fonctions d'utilité qui conduisent à une mesure absolue d'aversion au risque constante sont de la forme :

$$u : x \longmapsto C_1 + C_2 e^{ax} \quad \text{avec } C_1 \quad \text{et} \quad C_2 \quad \text{des constantes.}$$

6.3.3 Équation avec second membre

Lorsqu'on doit déterminer une solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, on procède comme pour l'ordre 1. A savoir :

- On calcule la solution de l'équation homogène associée
- On détermine une solution particulière

La solution générale est alors la somme de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière.

Solution générale de l'équation complète	=	Solution particulière	+	Solution générale de l'équation **HOMOGÈNE**

Il n'est pas toujours simple de trouver une solution particulière. Dans le cas de l'ordre 2, vous serez guidés par l'énoncé de l'exercice.

Exemple 6.14 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 9t^2 \quad \text{(E)}.$$

On commence par résoudre l'équation homogène associée :

$$y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 0 \quad \text{(EH)}.$$

L'équation caractéristique associée à (EH) est la suivante :

$$r^2 - 2r - 3 = 0 \quad \text{(EC)}$$

Le discriminant de ce polynôme de degré 2 vaut : $\Delta = 16$. Elle possède donc deux racines -1 et 3.

Ainsi d'après le Théorème 6.4, les solutions de (EH) sont de la forme

$$y : t \longmapsto C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 \mathrm{e}^{3t}$$

avec C_1 et C_2 des constantes réelles.
Cherchons maintenant une solution particulière de cette équation. Le second membre étant un polynôme de degré 2, nous cherchons une solution particulière de la forme :

$$y_{part}(t) = At^2 + Bt + C.$$

Trouver cette solution particulière revient donc à déterminer A, B et C. On a :

$$y'_{part}(t) = 2At + B$$

et

$$y''_{part}(t) = 2A.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} y''_{part}(t) - 2y'_{part}(t) - 3y_{part}(t) &= 2A - 2(2At + B) - 3(At^2 + Bt + C) \\ &= (-3A)t^2 + (-4A - 3B)t + 2A - 2B - 3C \end{aligned}$$

Comme y_{part} est solution de (E), on a : $y''_{part}(t) - 2y'_{part}(t) - 3y_{part}(t) = t^2$. On cherche donc A, B et C tels que :

$$(-3A)t^2 + (-4A - 3B)t + 2A - 2B - 3C = 9t^2$$

On identifie les termes de même degré et on obtient le système:

$$\begin{cases} -3A &= 9 \\ -4A - 3B &= 0 \\ 2A - 2B - 3C &= 0 \end{cases}$$

On résout et on obtient $A = -3$, $B = 4$ et $C = -\dfrac{14}{3}$. Par conséquent, une solution particulière de (E) est :

$$y_{part}(t) = -3t^2 + 4t - \frac{14}{3}.$$

On en déduit que les solutions générales de (E) sont de la forme :

$$y : t \in \mathbb{R} \longmapsto -3t^2 + 4t - \frac{14}{3} + C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 \mathrm{e}^{3t}$$

avec C_1 et C_2 des constantes réelles.

Exemple 6.15 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(\text{E}) : \quad y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 2\mathrm{e}^{-t}.$$

- **Équation homogène :** (EH) : $y'' + 2y' + y = 0$. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 2r + 1 = 0$. Son discriminant est nul et elle n'a qu'une seule racine double: -1.
  Les solutions de (EH) sont les fonctions $y : t \longmapsto (C_1 t + C_2)\mathrm{e}^{-t}$ avec C_1 et C_2 des constantes.

- **Solution particulière.**
  On va chercher une solution particulière de la forme $y_{part} : t \longmapsto \alpha t^2 \mathrm{e}^{-t}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer y_{part} revient alors à déterminer α. On a :

$$y'_{part}(t) = \alpha(2t\mathrm{e}^{-t} - t^2\mathrm{e}^{-t}) = \alpha(2t - t^2)\mathrm{e}^{-t}$$

  et

$$y''_{part}(t) = \alpha((2-2t)\mathrm{e}^{-t} - (2t - t^2)\mathrm{e}^{-t}) = \alpha(t^2 - 4t + 2)\mathrm{e}^{-t}.$$

  Ainsi

$$\begin{aligned} y_{part} \text{ est une solution de (E)} &\iff y''_{part}(t) + 2y'_{part}(t) + y_{part}(t) = 2\mathrm{e}^{-t} \\ &\iff \alpha(t^2 - 4t + 2)\mathrm{e}^{-t} + 2\alpha(2t - t^2)\mathrm{e}^{-t} + \alpha t^2 \mathrm{e}^{-t} = 2\mathrm{e}^{-t} \\ &\iff \alpha(t^2 - 4t + 2) + 2\alpha(2t - t^2) + \alpha t^2 = 2 \\ &\iff 2\alpha = 2 \end{aligned}$$

  Donc $y_{part} : t \mapsto t^2\mathrm{e}^{-t}$ est une solution particulière de (E).

- L'ensemble des solutions de (E) est donc:

$$y : t \in \mathbb{R} \longmapsto (t^2 + C_1 t + C_2)\mathrm{e}^{-t}$$

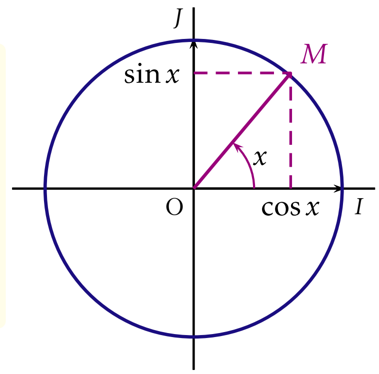
  avec C_1 et C_2 des constantes.

6.4 Complément sur les fonctions trigonométriques

Rappels sur le cercle trigonométrique

Définition 6.4 Soit x une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$ où M est un point du cercle trigonométrique.

- Le cosinus de x, noté $\cos x$, est l'abscisse du point M.
- Le sinus de x, noté $\sin x$, est l'ordonnée du point M.

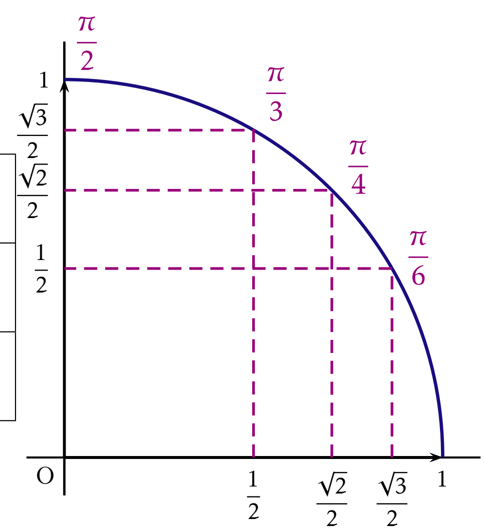


Propriété 6.1

- Pour tout réel x et pour tout entier relatif k, $\cos(x+2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2k\pi) = \sin x$
- Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- Pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Les fonctions cosinus et sinus

Propriété 6.2 **(Périodicité)** Pour tout réel x, $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$. On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques** de période 2π (on dit aussi 2π-périodiques).

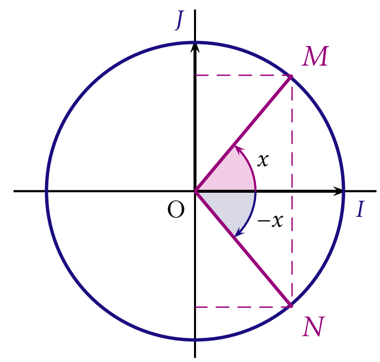
<u>Remarque</u> : La fonction cosinus (ou sinus) est entièrement connues dès qu'on connaît ses valeurs sur un intervalle $[a; a+2\pi[$.

Propriété 6.3 (Parité)

- Pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$. On dit que la fonction cosinus est **paire**. Ainsi la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$. On dit que la fonction sinus est **impaire**. Ainsi la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Pour tout réel x :

$$\boxed{\begin{array}{c}\cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = \sin x\end{array}}$$

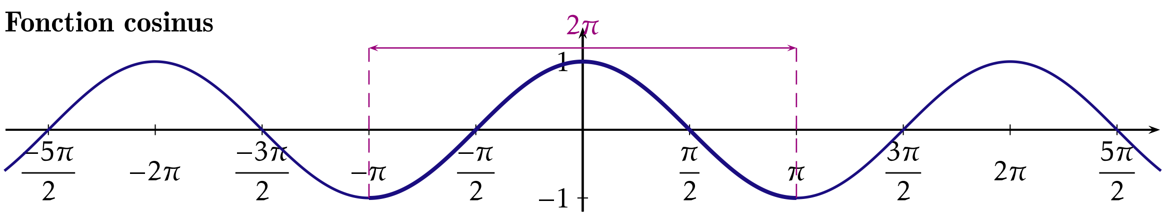


Remarque : Il suffit d'étudier les fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle $[0;\pi]$ *pour les connaître sur* $[-\pi;\pi]$ *à l'aide de la parité et enfin sur* $\mathbb{R}$ *à l'aide de la périodicité.*

Propriété 6.4 (Dérivées)

- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.
- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$.

Fonction cosinus



Fonction sinus