5. Variables aléatoires continues

> Le calcul des probabilités appliqué à la mortalité humaine a donné naissance à une science nouvelle : celle des assurances
>
> *Emile de Girardin*

Ce chapitre a pour objectif l'étude des variables aléatoires définies sur un univers infini, non dénombrable. Ces variables aléatoires sont dites à densité et possèdent un certain nombre de propriétés que nous étudierons en détail. Pour finir, nous verrons des lois usuelles qui permettent de modéliser un nombre important d'expériences aléatoires.

5.1 Exemple introductif

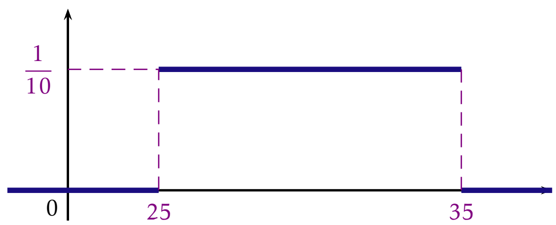
Considérons la variable aléatoire X qui représente la durée du trajet à pied par un·e étudiant·e entre le lycée Malherbe et la BU Pierre Sineux.

La durée du trajet est comprise entre 25 et 35 minutes. Puisque la variable aléatoire X peut prendre n'importe quelle valeur dans cet intervalle de temps, X est une **variable aléatoire continue** et non pas discrète.

Supposons que les données actuelles sur l'état de forme des étudiant·e·s nous permettent de conclure que la probabilité que la durée du trajet appartienne à un intervalle d'une minute, compris entre 25 et 35 minutes, est la même que la probabilité que la durée du trajet appartienne à un autre intervalle d'une minute compris entre 25 et 35 minutes. Puisque tous les intervalles d'une minute, compris entre 25 et 35, sont équiprobables, on dit que la variable aléatoire X suit une **loi uniforme**.

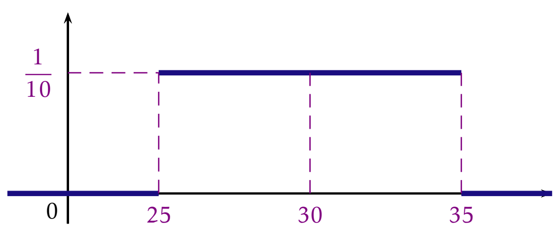
La fonction de densité de probabilité, qui définit la loi uniforme de la variable alétoire X, correspond à :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} & \text{si } 25 \leqslant x \leqslant 35 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Pour une variable aléatoire continue, la probabilité correspond à la vraisemblance que cette variable aléatoire prenne une valeur appartenant à un intervalle particulier.
Revenons à la durée du trajet Malherbe-BU, on peut se demander quelle est la probabilité que celle-ci soit comprise entre 25 et 30 minutes i.e. quelle est la valeur de $P(25 \leqslant x \leqslant 30)$?

Puisqu'on a supposé que les probabilités étaient distribuées uniformément, on pressent que $P(25 \leqslant x \leqslant 30) = 0,5$.



Considérons l'aire sous le graphique de $f(x)$ entre 25 et 30. La partie considérée est rectangulaire. Par conséquent, son aire est simplement égale à la largeur multipliée par la hauteur.

$$P(25 \leqslant x \leqslant 30) = \frac{1}{10} \times (30 - 25) = \frac{5}{10} = 0,5$$

Ce résultat est généralisable à toutes les variables aléatoires continues. Une fois la fonction de densité $f(x)$ identifiée, la probabilité que X prenne une valeur comprise entre x_1 et x_2 est égale à l'aire sous le graphique de $f(x)$ comprise entre x_1 et x_2.
Ainsi calculer une probabilité revient à calculer une aire sous la courbe donc à calculer une intégrale !

5.2 Rappels sur la fonction de répartition

Définition 5.1 Soit X une variable aléatoire. On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire X la fonction F_X définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leqslant x).$$

Remarque : Pour $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x)$ est égale à la probabilité que la variable aléatoire X ne dépasse pas x.

Exemple 5.1 Reprenons l'Exemple du tirage de jetons numérotés du Chapitre 3.

Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. Pour jouer une partie, on doit miser 1€. On tire au hasard un jeton. Si on a le numéro 1 on gagne 4€, si on a un numéro pair on reçoit 2€ et rien sinon. On note X le gain (algébrique). X est une variable aléatoire et $X(\Omega) = \{-1, 1, 3\}$.

La loi de la variable aléatoire X est donnée par

$$P(X=-1) = \frac{2}{5}, \qquad P(X=1) = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad P(X=3) = \frac{1}{5}.$$

Ce que l'on peut résumer par le tableau suivant.

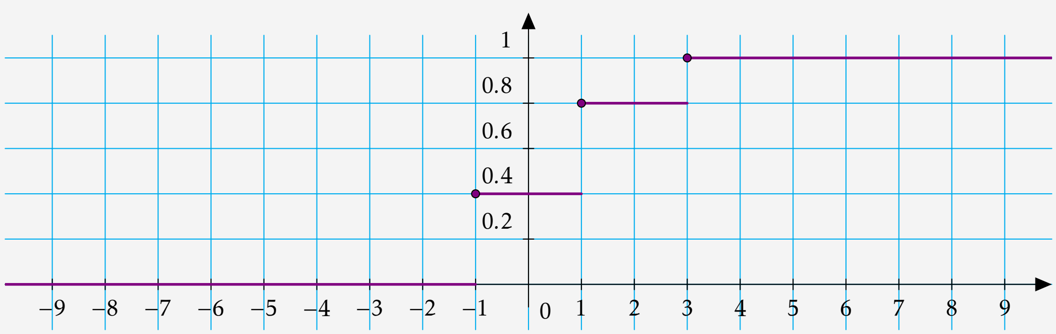
x	-1	1	3
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

Déterminons sa fonction de répartition.

- si $x < -1$, alors $F_X(x) = 0$,
- si $-1 \leqslant x < 1$, alors $F_X(x) = P(X=-1) = \frac{2}{5}$,
- si $1 \leqslant x < 3$, alors $F_X(x) = P(X=-1) + P(X=1) = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$,
- si $x \geqslant 3$, alors $F_X(x) = 1$.

Ce que l'on peut résumer par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1, \\ \frac{2}{5} & \text{si} \quad -1 \leqslant x < 1, \\ \frac{4}{5} & \text{si} \quad 1 \leqslant x < 3, \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 3. \end{cases}$$



Proposition 5.1 Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et soit F_X sa fonction de répartition. Alors:

- Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a: $F_X(x) \in [0, 1]$.
- F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
- F_X est continue à droite en tout x de $\mathbb{R}$: $\lim_{t \to x^+} F_X(t) = F_X(x)$
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

Remarque : Dans le cas d'une variable aléatoire X discrète, la fonction de répartition F_X est une fonction en escalier donc discontinue.

5.3 Généralités

5.3.1 Notion de variable aléatoire à densité

Définition 5.2 Soit X une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition. On dit que X est une **variable aléatoire à densité** si et seulement s'il existe une fonction f vérifiant les quatre conditions suivantes.

- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.
- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de réels.
- L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$.
- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

Lorsque les conditions précédentes sont vérifiées, f est appelée **densité de** X.

Définition 5.3 Une fonction f est une **densité de probabilité** (ou plus simplement **densité**) si et seulement si

1. pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$,
2. f est continue par morceaux avec un nombre fini de points de discontinuité,
3. l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$.

Méthode 5.1 (Comment montrer qu'une fonction f est une densité de probabilité ?)

1. On montre que f est positive sur $\mathbb{R}$
2. On montre que f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points
3. On montre que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente et vaut 1.

Exemple 5.2 On considère la fonction f suivante

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}. \end{array} \right.$$

Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.

• Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$ et $(1+\mathrm{e}^x)^2 > 0$. Donc $f(x) > 0$.
• La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
• Soit $M \geqslant 0$. Calculons $\displaystyle\int_0^M \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x$.
La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$ est de la forme $\dfrac{-u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1+\mathrm{e}^x$. Alors

$$\frac{-u'(x)}{u(x)^2} = \frac{-\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = -f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = -\frac{1}{u(x)} = \frac{-1}{1+\mathrm{e}^x}.$$

Ainsi

$$\int_0^M \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{1+\mathrm{e}^x}\right]_0^M = \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}^M}.$$

Comme

$$\lim_{M\to+\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}^M} = 1,$$

l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x$ converge et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

De même, pour $m \leqslant 0$,

$$\int_m^0 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \left[\frac{-1}{1+e^x}\right]_m^0 = \frac{1}{1+e^m} - \frac{1}{2}.$$

Et comme

$$\lim_{m \to -\infty} \frac{1}{1+e^m} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2},$$

l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ converge et

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \frac{1}{2}.$$

En résumé, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

La fonction f vérifie donc bien les trois points de la définition ci-dessus. Donc f est bien une densité de probabilité.

Théorème 5.1 Si X est une variable aléatoire à densité, de fonction de répartition F_X et de densité f, alors, en chaque réel x où f est continue, on a $f(x) = F_X'(x)$.

Théorème 5.2 Si X est une variable aléatoire à densité, de fonction de répartition F_X, alors toute fonction f à valeurs positives qui vérifie $f(x) = F_X'(x)$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points) est une densité de X.

Exemple 5.3 Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1, \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \geqslant 1. \end{cases}$ On admet que X est une variable aléatoire à densité. Déterminer une densité de X.

La fonction F_X est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1, \\ \frac{1}{x^2} & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

Donc une densité de f est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1, \\ \frac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \geqslant 1. \end{cases}$$

Remarque : Il n'y a pas unicité d'une densité pour une variable à densité donnée. En effet, si f est une densité de X, alors toute fonction g positive, égale à f, sauf en un nombre fini de points, est également une densité de X.

5.3.2 Calculs de probabilités avec des variables aléatoires à densité

Proposition 5.2 Soit X une variable aléatoire à densité, F_X sa fonction de répartition et f une densité de X.

Soient a et b deux réels avec $a < b$. On rappelle que $P(X \leqslant a) = F_X(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)\mathrm{d}t$.

Alors

- $P(X < a) = P(X \leqslant a) = F_X(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)\mathrm{d}t$,
- $P(X = a) = 0$,
- $P(X \geqslant a) = P(X > a) = 1 - F_X(a) = \displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$,
- $P(a < X < b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$ et on a

$$F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Exemple 5.4 Soit X une variable aléatoire, de fonction de répartition

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 2, \\ 1 - \dfrac{8}{x^3} & \text{si} \quad x \geqslant 2. \end{cases}$$

On admet que X est une variable aléatoire à densité.

Calculer $P(X \geqslant 0)$, $P(-1 \leqslant X < 3)$, $P(X < 4)$.

D'après la proposition ci-dessus, on a

- $P(X \geqslant 0) = 1 - F_X(0) = 1 - 0 = 1$,
- $P(-1 \leqslant X < 3) = F_X(3) - F_X(-1) = 1 - \dfrac{8}{3^3} - 0 = 1 - \dfrac{8}{27} = \dfrac{19}{27}$,
- $P(X < 4) = F_X(4) = 1 - \dfrac{8}{4^3} = 1 - \dfrac{8}{64} = 1 - \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$.

Exemple 5.5 Soit X une variable aléatoire à densité, de densité

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0, \\ e^{-t} & \text{si} \quad t > 0. \end{cases}$$

Calculer $P(X \leqslant 2)$, $P(2 < X \leqslant 3)$ et $P(X \geqslant 1)$.

D'après la proposition ci-dessus, on a

- $P(X \leqslant 2) = \int_{-\infty}^{2} f_X(t) = \int_0^2 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \quad$ car $f_X(t) = 0$ si $t \leqslant 0$,
- $P(2 < X \leqslant 3) = \int_2^3 f_X(t) = \int_2^3 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$,
- $P(X \geqslant 1) = \int_1^{+\infty} f_X(t) = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

Une primitive de e^{-t} est donnée par $-e^{-t}$, donc

$$P(X \leqslant 2) = \int_0^2 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \Big[-\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^2 = 1 - \mathrm{e}^{-2}$$

et

$$P(2 < X \leqslant 3) = \int_2^3 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \Big[-\mathrm{e}^{-t}\Big]_2^3 = \mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-3}.$$

Enfin, pour $M \geqslant 1$, on a

$$\int_1^M \mathrm{e}^{-t} = \Big[-\mathrm{e}^{-t}\Big]_1^M = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-M}.$$

Or $\lim\limits_{M \to +\infty} \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-M} = \mathrm{e}^{-1}$, donc

$$P(X \geqslant 1) = \int_1^{+\infty} e^{-t} = \mathrm{e}^{-1}.$$

5.3.3 Espérance d'une variable à densité

Définition 5.4 Sous réserve de convergence de l'intégrale écrite, l'espérance de X est le réel, noté $E(X)$, défini par

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) \mathrm{d}t.$$

Exemple 5.6 Soit X une variable aléatoire de densité $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0, \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad t > 0. \end{cases}$
X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Il nous faut étudier la convergence de l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) \mathrm{d}t.$$

Comme f est nulle sur $]-\infty, 0]$, l'intégrale sur $]-\infty, 0]$ converge et vaut 0. Par ailleurs, soit $M \geqslant 0$, et calculons $\displaystyle\int_0^M t\mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$. Pour cela, on effectue une intégration par parties en posant

$$\begin{cases} u(t) & = & t, \\ v'(t) & = & \mathrm{e}^{-t}, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} u'(t) & = & 1, \\ v(t) & = & -\mathrm{e}^{-t}. \end{cases}$$

On a alors

$$\int_0^M t\mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \Big[-t\mathrm{e}^{-t} \Big]_0^M + \int_0^M \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = -M\mathrm{e}^{-M} + \Big[-\mathrm{e}^{-t} \Big]_0^M = -M\mathrm{e}^{-M} + 1 - \mathrm{e}^{-M}.$$

Or $\displaystyle\lim_{M \to +\infty} -M\mathrm{e}^{-M} + 1 - \mathrm{e}^{-M} = 1$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$ converge et

$$\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = 1.$$

En résumé, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$ converge et vaut 1. Ainsi X admet une espérance et

$$E(X) = 1.$$

Exemple 5.7 Soit Y la variable aléatoire de densité $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{1}{t^2} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}.$$

Y admet-elle une espérance? Si oui, la calculer.

Il nous faut étudier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\,\mathrm{d}t$.
Comme g est nulle sur $]-\infty;1[$, l'intégrale sur $]-\infty;1[$ converge et vaut 0. Par ailleurs, soit $M \geqslant 0$. Calculons :

$$\int_1^M tg(t)\mathrm{d}t = \int_1^M t \times \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^M \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^M = \ln(M).$$

On a alors :

$$\lim_{M \to +\infty} \int_1^M tg(t)\mathrm{d}t = +\infty$$

donc la variable aléatoire Y n'admet pas d'espérance.

Remarque : Une variable aléatoire est dite centrée lorsque son espérance est nulle.

Proposition 5.3 Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance et soient a et b deux réels. Si $a \neq 0$, la variable aléatoire $Y = aX + b$ admet une espérance et

$$E(aX+b) = aE(X) + b.$$

5.3.4 Variance d'une variable aléatoire à densité

Définition 5.5 Une variable aléatoire X de densité f admet **un moment d'ordre 2** lorsque X^2 admet une espérance. Dans ce cas, on appelle **moment d'ordre 2** de X, le réel

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t.$$

Définition 5.6 Si une variable aléatoire X de densité f admet un moment d'ordre 2, alors on appelle **variance** de X, et on note $V(X)$, le réel défini par

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t)\mathrm{d}t.$$

Définition 5.7 Si X est une variable aléatoire à densité admettant une variance, on appelle **écart-type** de X, le réel positif, noté σ_X, défini par

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$

Théorème 5.3 (Formule de König-Huygens) Si X est une variable aléatoire à densité possédant une variance, alors on a

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Méthode 5.2 (Montrer qu'une variable à densité possède une variance et la calculer.)

- Si X n'admet pas d'espérance, alors elle n'admet pas de variance.
- Si X admet une espérance, il faut regarder si $E(X^2)$ existe.
  - Si non, alors X n'admet pas de variance.
  - Si oui, alors on la calcule en utilisant la formule de König-Huygens

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Exemple 5.8 Soit X une variable aléatoire de densité $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$

X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

On a déjà vu que X admet une espérance et que $E(X) = 1$. Regardons si $E(X^2)$ existe i.e. si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Comme f est nulle sur $]-\infty, 0]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 0.

Soit maintenant $M \geqslant 0$ et calculons

$$\int_0^M t^2 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^M t^2 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

Pour cela, on effectue une première intégration par parties, en posant

$$\begin{cases} u(t) &= t^2, \\ v'(t) &= \mathrm{e}^{-t}, \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(t) &= 2t, \\ v(t) &= -\mathrm{e}^{-t}. \end{cases}$$

On a alors

$$\int_0^M t^2 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[-t^2\mathrm{e}^{-t}\right]_0^M + 2\int_0^M t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -M^2e^{-M} + 2\int_0^M te^{-t}\mathrm{d}t.$$

Or on a déjà vu que $\displaystyle\int_0^M t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -M\mathrm{e}^{-M} + 1 - \mathrm{e}^{-M}$, donc

$$\int_0^M t^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -M^2\mathrm{e}^{-M} - 2M\mathrm{e}^{-M} + 2 - 2\mathrm{e}^{-M}.$$

Et comme $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} -M^2\mathrm{e}^{-M} - 2M\mathrm{e}^{-M} + 2 - 2\mathrm{e}^{-M} = 2$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 2.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 2.

Autrement dit, $E(X^2)$ existe et vaut 2.

Ainsi X admet une variance que l'on peut obtenir par la formule de König-Huygens

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 - 1^2 = 1.$$

Proposition 5.4 Si X est une variable aléatoire possédant une variance, alors quels que soient les réels a et b, $aX + b$ admet une variance et on a

$$V(aX+b) = a^2V(X).$$

Exemple 5.9 On reprend la variable aléatoire X de l'exemple précédent, et on note $Y = 3 - 2X$. Y admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

D'après la propriété ci-dessus, Y admet une variance et

$$V(Y) = V(3-2X) = (-2)^2V(X) = 4\times 1 = 4.$$

Remarque : Une variable aléatoire est dite réduite lorsque sa variance est égale à 1.

5.4 Lois usuelles à densité

Les **variables aléatoires à densité usuelles** ne correspondent pas toujours à des modèles aléatoires simples. C'est par l'expérimentation que les statisticiens ont mis en évidence un certain nombre de lois « classiques » auxquelles on se réfère fréquemment. C'est l'inférence statistique[1] qui permettra de dire qu'une variable aléatoire X suit (avec une marge raisonnable d'erreur) une loi donnée.

5.4.1 Loi uniforme sur un intervalle

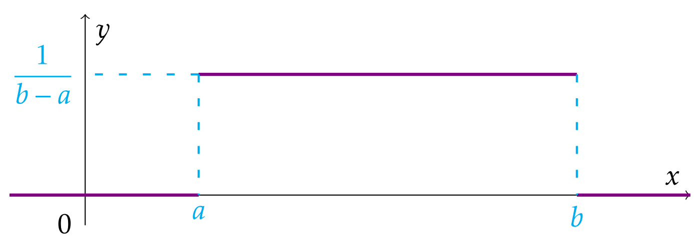
Dans ce paragraphe, a et b sont des nombres réels avec $a < b$.

La loi uniforme sur $[a, b]$ est la loi du tirage au hasard d'un nombre dans cet intervalle : la variable X a autant de chance de tomber n'importe où dans l'intervalle $[a, b]$.

Définition 5.8 On dit que X suit la **loi uniforme** sur $[a, b]$ lorsque X est la variable aléatoire de densité f définie par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad t \in [a, b], \\ 0 & \text{si} \quad t \notin [a, b]. \end{cases}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.



Remarque : La fonction f définie sur $[a, b]$ par $f(t) = \dfrac{1}{b-a}$ est bien une densité de probabilité sur l'intervalle $[a, b]$ puisque

- *f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{a, b\}$ et positive,*
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{1}{b-a}\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^b = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = 1.$

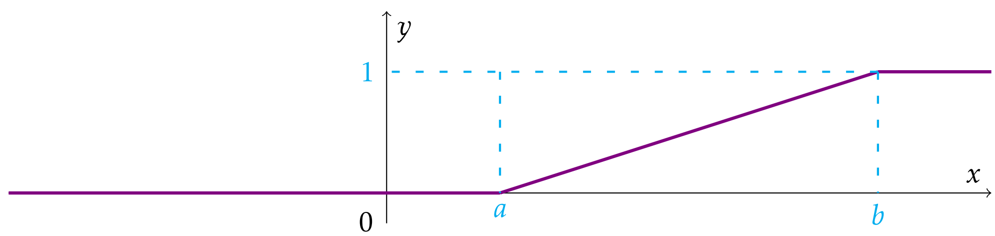
Attention ! A ne pas confondre avec une variable aléatoire **discrète** suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Cependant, ces deux lois jouent des rôles assez similaires l'une dans le cas discret, l'autre dans le cas continu.

[1] L'inférence statistique est l'ensemble des techniques permettant d'induire les caractéristiques d'un groupe général (la population) à partir de celles d'un groupe particulier (l'échantillon), en fournissant une mesure de la marge d'erreur.

Proposition 5.5 Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$, alors la fonction de répartition F_X de X est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a,b], \\ 1 & \text{si} \quad x > b. \end{cases}$$

Donnons la représentation graphique de F_X :



Proposition 5.6 Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$, alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

<u>Remarque</u> : Lorsqu'un événement peut se produire de façon ***équiprobable*** *dans un* ***intervalle*** *$[a,b]$ et seulement dans cet intervalle, la variable aléatoire qui représente l'instant (ou l'endroit) où cet événement se produit suit une loi uniforme sur $[a,b]$.*

Exemple 5.10 Le temps d'attente T, en minutes, auprès du standard téléphonique du service après-vente d'une entreprise suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0.5, 9.5]$.

1. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes ?
3. Quel est le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique ?

1. La probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 minutes est
$P(T \leqslant 2) = F_T(2) = \dfrac{2-0.5}{9} = \dfrac{1}{6}$.
2. La probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes est
$P(T \geqslant 3) = 1 - F_T(3) = \dfrac{9.5-3}{9} = \dfrac{13}{18}$.
3. L'espérance mathématique de T est $E(T) = \dfrac{0.5+9.5}{2} = 5$.
Le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique est de 5 minutes.

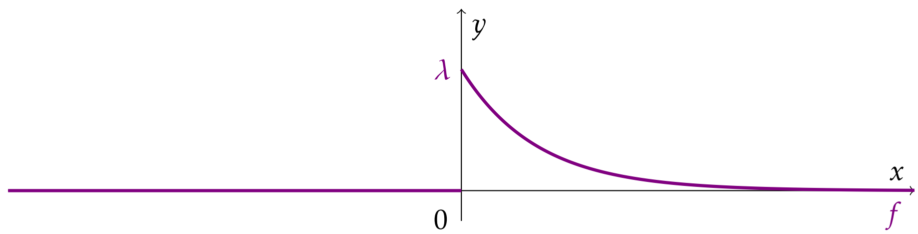
5.4.2 Loi exponentielle

Dans ce paragraphe, λ désigne un nombre réel strictement positif.

Définition 5.9 On dit que X suit la **loi exponentielle** de paramètre λ lorsque X est la variable aléatoire de densité f définie par

$$f(t) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geqslant 0, \\ 0 & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

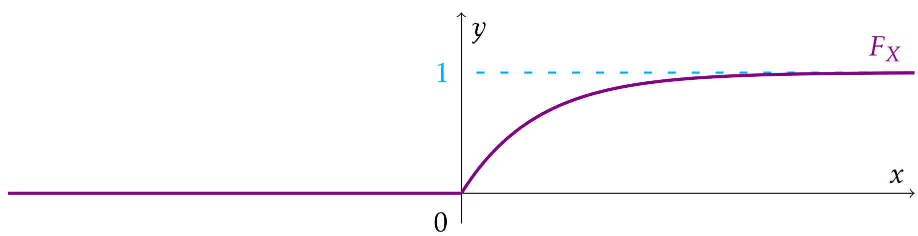
On note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.



Proposition 5.7 Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors la fonction de répartition F_X de X est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Donnons la représentation graphique de F_X :



Proposition 5.8 Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

<u>Remarque</u> : *La loi exponentielle est utilisée pour modéliser des « durées de vie ».*

5.4.3 Loi normale

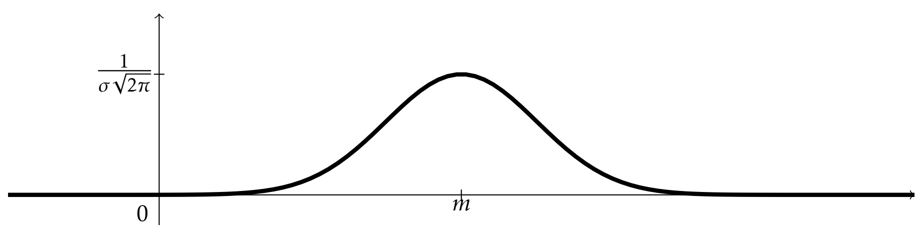
La loi la plus importante pour décrire une variable aléatoire continue est la **loi normale**. La loi normale a été utilisée dans de nombreuses applications pratiques, dans lesquelles les variables aléatoires étaient la taille et le poids des individus, les résultats des tests d'intelligence, des mesures scientifiques, le niveau des précipitations, etc. Elle est également très utilisée dans le domaine de l'inférence statistique. Dans de telles applications, la loi normale fournit une description des résultats possibles grâce à un échantillon.

Dans ce paragraphe, m désigne un nombre réel et σ un réel strictement positif.

Définition 5.10 On dit que X suit la **loi normale** de paramètres m et σ^2 lorsque X est la variable aléatoire de densité f définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.



Remarque : La courbe de la loi normale a deux paramètres : σ et m. Ils déterminent la position et la forme de la distribution de probabilités. La densité est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = m$ et la « largeur de la cloche » dépend de σ.

Proposition 5.9 Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = m \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2.$$

5.4.4 Loi normale centrée réduite

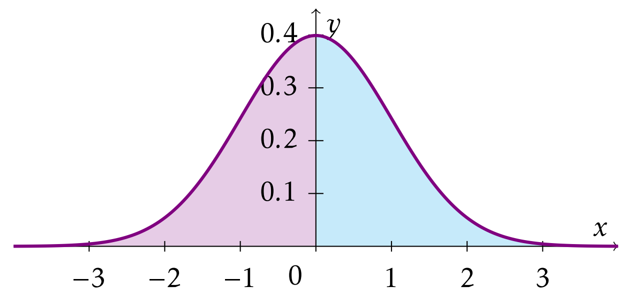
Définition 5.11 On dit que X suit la **loi normale centrée réduite** lorsque X est la variable aléatoire de densité f définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

La courbe de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc les probabilités $P(X \leqslant 0)$ et $P(X \geqslant 0)$ sont égales.
Comme $P(X \leqslant 0) + P(X > 0) = 1$, on en déduit que

$$P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0) = \frac{1}{2}.$$



Définition 5.12 La fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est la fonction, notée Φ, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}} \mathrm{d}t.$$

Attention ! Il n'est pas possible de calculer cette intégrale à l'aide des fonctions usuelles. Pour déterminer les valeurs de $\Phi(x)$ pour un x donné, on utilisera le tableau se trouvant en fin de chapitre.

Proposition 5.10 Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Notons Φ la fonction de répartition de X. Alors:

- $\Phi(0) = \frac{1}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
- $\forall a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \quad P(a \leqslant X \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a)$

<u>*Remarque*</u> : *Ces formules sont très utiles, combinées avec la table de valeurs de la page suivante.*

Proposition 5.11 Si X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = 0 \quad \text{et} \quad V(X) = 1.$$

Théorème 5.4 Soit X une variable aléatoire. Alors

$$X \text{ suit la loi } \mathcal{N}(m,\sigma^2) \iff \frac{X-m}{\sigma} \text{ suit la loi } \mathcal{N}(0,1).$$

Méthode 5.3 (Déterminer une probabilité si X suit une loi normale)

- Si X suit une loi normale qui n'est pas centrée réduite, on se ramène à la loi $\mathcal{N}(0,1)$ à l'aide de la variable aléatoire $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$.
- On peut alors utiliser les valeurs de la table avec la variable aléatoire X^*.

Exemple 5.11 Les températures autour du lac d'Annecy au mois de juillet suivent une loi normale d'espérance 18°C et d'écart-type 3°C. Une personne part camper autour du lac d'Annecy.

1. Quelle est la probabilité que la température soit inférieure à 12°C?

   On note T la variable aléatoire à la température.
   D'après l'énoncé, on a $T \hookrightarrow \mathcal{N}(18,9)$ On introduit la variable aléatoire T^* définie par $T^* = \dfrac{T-18}{3}$ alors T suit une loi normale centrée réduite. On a

   $$P(T \leqslant 12) = P(T-18 \leqslant -6) = P(T^* \leqslant -2) = \Phi(-2) = 1-\Phi(2).$$

   On utilise maintenant la table pour conclure que

   $$P(T \leqslant 12) = 1-0.9772 = 0.0228.$$

2. Quelle est la probabilité que la température soit supérieure à 24°C?

   On a

   $$P(T \geqslant 24) = P(T-18 \geqslant 6) = P(T^* \geqslant 2) = 1-P(T^* \leqslant 2) = 1-\Phi(2) = \Phi(-2).$$

   Donc

   $$P(T \geqslant 24) = 0.0228.$$

3. Quelle est la probabilité que la température soit comprise entre 15 et 20°C ?

   On a :

   $$P(15 \leqslant T \leqslant 20) = P(15-18 \leqslant T-18 \leqslant 20-18) = P\left(\frac{15-18}{3} \leqslant \frac{T-18}{3} \leqslant \frac{20-18}{3}\right)$$

   Ainsi

   $$P(15 \leqslant T \leqslant 20) = P\left(-1 \leqslant T^* \leqslant \frac{2}{3}\right) \simeq P(-1 \leqslant T^* \leqslant 0,67)$$

   Or

   $$P(-1 \leqslant T^* \leqslant 0,67) = \Phi(0,67)-\Phi(-1) = \Phi(0,67)-1+\Phi(1)$$

   avec la table, on obtient : $\Phi(0,67) = 0,7486$ et $\Phi(1) = 0,8413$. On a donc :

   $$P(15 \leqslant T \leqslant 20) \simeq 0,5899.$$

Fonction de répartition Φ d'une variable aléatoire X suivant la Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

$$\Phi(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000