3. Variables aléatoires discrètes

La fusée interplanétaire des Shadoks n'était pas très au point, mais ils avaient calculé qu'elle avait quand même une chance sur un million de marcher. Et ils se dépêchaient de bien rater les 999999 premiers essais pour être sûrs que le millionième marche.

Jacques Rouxel

Dans ce chapitre, nous introduisons les variables aléatoires sur des univers finis ou infinis dénombrables. A priori, les définitions sont données dans le cadre d'ensembles finis; nous ne limiterons toutefois pas toujours à ce cadre car la plupart de ces notions se généralisent à des ensembles infinis en introduisant des raffinements que nous n'aborderons que très peu.
De nombreuses variables aléatoires rencontrées dans les modèles mathématiques suivent un petit nombre de lois, nommées en conséquence **lois usuelles***. Elles sont étudiées dans la dernière partie de ce chapitre.*

3.1 Généralités sur les variables aléatoires

3.1.1 Définitions et exemples

Quand on étudie une probabilité, l'univers Ω (l'ensemble des résultats possibles) n'est pas forcément composé d'objets mathématiques : par exemple $\left\{\text{pile}, \text{face}\right\}$. Dans ce cas, à chaque issue, on associe un nombre réel. On définit ainsi une fonction de l'univers Ω dans $\mathbb{R}$. On peut par exemple considérer le gain obtenu à l'issu d'un jeu de hasard ou encore le temps d'attente d'un bus.

Définition 3.1 Une **variable aléatoire** X est une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
On appelle **support** de X et on note $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises par X.
Si l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs effectivement prises par X, est fini ou dénombrable, on dit que la variable aléatoire est **discrète**.

Remarque :

1. *Un ensemble E est dit dénombrable si on peut dénombrer (i.e. « compter ») ses éléments ou encore si on peut l'écrire sous la forme $E = \{e_k, k \in \mathbb{N}\}$.*

2. *Lorsque $X(\Omega)$ n'est ni fini, ni dénombrable i.e. que la variable aléatoire prend toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$ alors on dit que la variable aléatoire est* **continue** *(cf Chapitre 5).*

Exemple 3.1 Tout au long de ce chapitre, on s'appuie sur les deux exemples suivants pour illustrer les différentes notions rencontrées.

1. **Tirage de jetons numérotés** Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5. Pour jouer une partie, on doit miser 1€. On tire au hasard un jeton. Si on a le numéro 1, on gagne 4€, si on a un numéro pair on reçoit 2€ et rien sinon. On note X le gain (algébrique). X est une variable aléatoire et son support est
$$X(\Omega) = \left\{-1, 1, 3\right\}.$$

2. **Somme de deux dés** On lance deux dés équilibrés et on note X la somme des deux résultats obtenus. X est une variable aléatoire et son support est
$$X(\Omega) = [\![2, 12]\!] \qquad \textit{on obtient au minimum } 2 \textit{ et au maximum } 12.$$

3.1.2 Événements associés à une variable aléatoire

Définition 3.2 Soit X une variable aléatoire sur Ω et $x \in \mathbb{R}$. On note
$$[X = x] = \left\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\right\}.$$
Il s'agit de l'ensemble des issues de l'univers dont l'image par la variable aléatoire est x.
De la même manière, on définit
$$[X \leqslant x] = \left\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\right\}, \qquad [X < x] = \left\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\right\},$$
$$[X \geqslant x] = \left\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant x\right\}, \qquad [X > x] = \left\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\right\}.$$

Exemple 3.2 Calculer $P\big([X=3]\big)$ et $P\big([X \leqslant 2]\big)$ dans les deux exemples de l'exemple 3.1.

1. **Tirage de jetons numérotés**

   Je gagne 3€ dans le cas où j'obtiens le tirage 1. Ainsi
   $$P(X=3) = P\big(\{1\}\big) = \frac{1}{5}.$$
   Par ailleurs, je gagne moins de 2€ dans le cas où j'obtiens n'importe quel tirage différent de 1. Autrement dit, si j'obtiens un 2, un 3, un 4 ou un 5. Ainsi
   $$P(X \leqslant 2) = P\big(\{2,3,4,5\}\big) = \frac{4}{5}.$$

2. **Somme de deux dés**

   La somme des deux dés vaut 3 si j'obtiens $(1,2)$ ou $(2,1)$ avec les deux dés. Puisqu'il y a au total 36 issues possibles lorsque je lance les deux dés (tous les tirages $(1,1)$, $(1,2)$, …, $(1,6)$, …, $(6,1)$, $(6,2)$, …, $(6,6)$), alors
   $$P(X=3) = P\big(\{(1,2),(2,1)\}\big) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$
   Par ailleurs, la somme des deux dés est inférieure ou égale à 2 seulement lorsque j'obtiens $(1,1)$ avec les deux dés. Ainsi
   $$P(X \leqslant 2) = P\big(\{(1,1)\}\big) = \frac{1}{36}.$$

Proposition 3.1 Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. Alors $\big\{[X=x] \mid x \in X(\Omega)\big\}$, l'ensemble des événements $[X=x]$ pour tous les x du support $X(\Omega)$, forme un système complet d'évènements. En particulier,
$$\sum_{x \in X(\Omega)} P\big([X=x]\big) = 1.$$

Exemple 3.3 On reprend les deux exemples de l'exemple 3.1.

1. **Tirage de jetons numérotés**

   Un système complet d'évènements est donné par $\big\{[X=-1],[X=1],[X=3]\big\}$.

2. **Somme de deux dés**

   Un système complet d'évènements est donné par

$$\Big\{[X=2],[X=3],[X=4],\dots,[X=12]\Big\}.$$

Remarque : Dans toute la suite, on convient d'alléger la notation $P\big([X=x]\big)$ en $P(X=x)$ et de même pour les autres ensembles.

3.1.3 Loi d'une variable aléatoire finie

Définition 3.3 Soit X une variable aléatoire sur Ω. On appelle **loi** de la variable aléatoire X la donnée de toutes les probabilités $P(X=x)$ pour tous les réels du support $x \in X(\Omega)$.

Méthode 3.1 (Donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire finie)

1. On détermine le support $X(\Omega)$, i.e. l'ensemble des valeurs prises par X.
2. On calcule les probabilités $P(X=x)$ pour tous les $x \in X(\Omega)$.

Lorsque $X(\Omega)$ est fini, on résume souvent la loi sous la forme d'un tableau avec sur la première ligne l'ensemble des valeurs prises par X et sur la seconde ligne les probabilités correspondantes.

Exemple 3.4 On reprend les deux exemples de l'exemple 3.1.

1. **Tirage de jetons numérotés**

   Pour déterminer la loi de la variable aléatoire X, je dois calculer les probabilités de tous les éléments du support. Alors en calculant le nombre d'issues favorables, j'obtiens

$$P(X=-1)=\frac{2}{5}, \qquad P(X=1)=\frac{2}{5} \quad \text{et} \quad P(X=3)=\frac{1}{5}.$$

   Je peux résumer cela dans le tableau suivant :

x	-1	1	3
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

2. **Somme de deux dés**

   De la même manière, je calcule les 11 probabilités

$$P(X=2)=P\Big(\{(1,1\}\Big)=\frac{1}{36}, \qquad P(X=3)=P\Big(\{(1,2),(2,1)\}\Big)=\frac{2}{36},$$

$$P(X=4)=P\Big(\{(1,3),(2,2),(3,1)\}\Big)=\frac{3}{36}, \qquad \text{etc.}$$

   Finalement j'obtiens le tableau suivant :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Remarque : On n'oublie pas de vérifier ***à chaque fois*** *que la somme des probabilités inscrites dans le tableau fait* 1.

Exercice 3.1 En Normandie, la probabilité qu'il fasse beau une journée donnée est de $\frac{1}{7}$. Les étudiants du CPES2 ont commencé les cours le lundi 2 septembre. A partir de ce jour-là, ils regardent le temps tous les jours et ils définissent une variable aléatoire X égale au numéro du premier jour où il a fait beau depuis la rentrée. Déterminer la loi de X.

Il peut faire beau pour la première fois : le premier jour ou le deuxième ou le troisième etc. Ainsi $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Notons B_i l'événement : « il fait beau le jour i ».
Pour qu'il fasse beau pour la première fois le i-ème jour, il faut qu'il ait fait moche les $i-1$ jours d'avant, on a donc pour $i\in\mathbb{N}^*$,

$$P(X=i)=P(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\ldots\cap\overline{B_{i-1}}\cap B_i)=\left(1-\frac{1}{7}\right)^{i-1}\times\frac{1}{7}=\left(\frac{6}{7}\right)^{i-1}\times\frac{1}{7}.$$

La loi de X est donc la suivante :

$$X(\Omega)=\mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall i\in\mathbb{N}^*, \quad P(X=i)=\left(\frac{6}{7}\right)^{i-1}\times\frac{1}{7}.$$

3.1.4 Fonction de répartition

Définition 3.4 Soit X une variable aléatoire. On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire X la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$F_X:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & P(X\leqslant x)\end{array}\right.$$

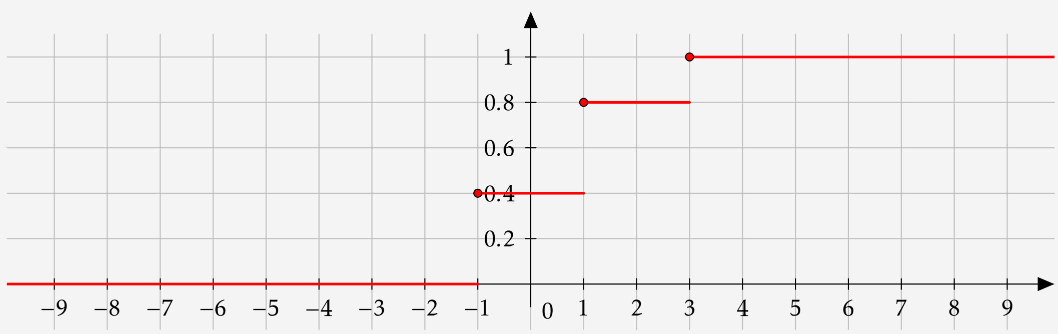
Exemple 3.5 Calculons la fonction de répartition de X pour le **tirage de jetons numérotés.**

On a vu que $X(\Omega) = \{-1; 1; 3\}$. Dès lors,

- Si $x < -1$, alors $F_X(x) = 0$.
- Si $-1 \leqslant x < 1$, alors $F_X(x) = P(X = -1) = \frac{2}{5}$.
- Si $1 \leqslant x < 3$, alors $F_X(x) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$.
- Si $x \geqslant 3$, alors $F_X(x) = 1$.

Ce que l'on peut résumer par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{2}{5} & -1 \leqslant x < 1 \\ \frac{4}{5} & 1 \leqslant x < 3 \\ 1 & x \geqslant 3 \end{cases}.$$



Remarque : Cette définition est à rapprocher de celle de la fonction de répartition d'une série statistique, vue au Chapitre 1, qui correspond au diagramme des fréquences cumulées.

Propriété 3.1 La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X vérifie :

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) \in [0, 1]$
- F_X est croissante sur $\mathbb{R}$
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- Pour tous réels a et b tels que $a < b$:

$$F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leqslant b).$$

3.2 Moments d'une variable aléatoire finie

3.2.1 Espérance

Définition 3.5 Soit X une variable aléatoire définie sur Ω, de support $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ où l'ensemble I peut être fini ou infini dénombrable (par exemple $\mathbb{N}$). On appelle **espérance** de X le réel, noté $E(X)$, défini par

$$E(X) = \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \cdots + x_k \times P(X = x_k) + \cdots .$$

Attention ! Dans le cas où I est fini, la somme que l'on calcule est toujours finie et X admettra toujours une espérance
En revanche, si $X(\Omega)$ est infini dénombrable par exemple si $X(\Omega) = \mathbb{N}$, la somme est alors **infinie** ! L'existence d'un tel objet n'est pas vraie pour toutes les variables aléatoires. Pour étudier un tel objet, il faudrait introduire de nouveaux objets mathématiques qui dépassent le cadre de ce cours. Ainsi, sauf mention du contraire, nous ne considérerons que des variables aléatoires qui admettent une espérance.

Remarque :

- *L'espérance $E(X)$ correspond à la moyenne des valeurs x_i affectées des fréquences $p_i = P(X = x_i)$. Elle correspond donc à la moyenne des valeurs prises par la variable aléatoire.*

- *Dans le cas particulier d'un jeu, l'espérance $E(X)$ est le gain moyen par partie qu'un joueur peut espérer obtenir s'il joue un grand nombre de fois. Le signe de $E(X)$ permet de savoir si le joueur a plus de chances de gagner que de perdre. Si $E(X) = 0$, on dit que le jeu est* ***équitable****.*

Exemple 3.6 Calculer l'espérance $E(X)$ pour chacun des deux exemples de l'exemple 3.1.

1. **Tirage de jetons numérotés**

   En utilisant la loi donnée précédemment, $E(X) = -1 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{2}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$.

2. **Somme de deux dés**

   En utilisant la loi donnée précédemment,

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + \cdots + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7.$$

Proposition 3.2 (Linéarité de l'espérance) Soient X et Y deux variables aléatoires finies définies sur Ω. Soient a et b deux réels. Alors

$$E(X+Y) = E(X)+E(Y) \quad \text{et} \quad E(aX+b) = aE(X)+b.$$

Exemple 3.7 On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu. Soit g la fonction définie par $g(x) = 2x+3$ et $Y = g(X) = 2X+3$. Déterminer l'espérance de Y.

Le support de X est $X(\Omega) = [\![1,6]\!]$ et comme le dé est non truqué, il s'agit d'une situation d'équiprobabilité. Ainsi $\forall k \in [\![1,6]\!], \quad P(X=k) = \frac{1}{6}$ et

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{6} k \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k = \frac{1}{6} \times \frac{6\times 7}{2} = \frac{7}{2}.$$

J'en déduis que

$$E(Y) = E(2X+3) = 2E(X)+3 = 2\times\frac{7}{2}+3 = 7+3 = 10.$$

Théorème 3.1 (Théorème de transfert) Soit X une variable aléatoire finie. On note le support $X(\Omega) = \{x_1,\dots,x_n\}$. Soit g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors l'espérance de $g(X)$ est donnée par

$$E\big(g(X)\big) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)P(X=x_i).$$

Exemple 3.8 On considère la fonction $g(x) = x^2$. Calculer $E\big(g(X)\big)$ pour chacun des deux exemples de l'exemple 3.1.

1. **Tirage de jetons numérotés**

   D'après le théorème de transfert et la loi de X calculée précédemment,

$$E\big(g(X)\big) = E\big(X^2\big) = (-1)^2\times\frac{2}{5}+1^2\times\frac{2}{5}+3^2\times\frac{1}{5} = \frac{2+2+9}{5} = \frac{13}{5}.$$

2. **Somme de deux dés**

   D'après le théorème de transfert et la loi de X calculée précédemment,

$$E\big(g(X)\big) = E\big(X^2\big) = 2^2\times\frac{1}{36}+3^2\times\frac{2}{36}+4^2\times\frac{3}{36}+\cdots+11^2\times\frac{2}{36}+12^2\times\frac{1}{36} = \frac{1974}{36} = \frac{329}{6}.$$

Remarque :

- *Le théorème de transfert montre que pour calculer l'espérance de $g(X)$, il est inutile de déterminer la loi de $g(X)$: il suffit de connaître la loi de X.*
- *Ce théorème est principalement utilisé pour calculer $E\left(X^2\right)$, l'espérance du carré d'une variable aléatoire, quantité nécessaire au calcul de la variance de X en utilisant la formule de König-Huygens.*

3.2.2 Variance

Définition 3.6 Soit X une variable aléatoire discrète.

- On appelle **variance** de X le réel, noté $V(X)$, défini par

$$V(X) = \sum_{i \in I} \left(x_i - E(X)\right)^2 P(X = x_i).$$

- On appelle **écart-type** de X et on note $\sigma(X)$ le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Attention ! De même que pour l'espérance, toutes les variables aléatoires n'admettent pas une variance.
Si la variable aléatoire est finie, la somme définissant la variance est finie donc existe toujours. Ainsi les variables aléatoires **finies** admettent toujours une variance.
En revanche, si la variable aléatoire est discrète infinie, cette somme n'est pas toujours finie et donc la variable aléatoire n'admet pas toujours une variance. Néanmoins, sauf mention du contraire, nous ne rencontrerons que des variables aléatoires qui admettent des variances.

Remarque : La variance mesure la dispersion de la variable aléatoire par rapport à son espérance. Elle est à mettre en parallèle avec la définition de la variance d'une série statistique que nous avons vue dans le Chapitre 1.

Théorème 3.2 **(Formule de König-Huygens)** Soit X une variable aléatoire finie. Alors

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2.$$

Méthode 3.2 **(Calculer la variance d'une variable aléatoire)**

1. On calcule $E\left(X^2\right)$ grâce au théorème de transfert.
2. Puis on utilise la formule de König-Huygens :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2.$$

Exemple 3.9 Calculer la variance $V(X)$ pour les deux exemples de l'exemple 3.1.

1. **Tirage de jetons numérotés**

   J'ai déjà calculé $E\left(X^2\right)$ dans la partie précédente et trouvé que $E\left(X^2\right) = \frac{13}{5}$. Par ailleurs $E(X) = \frac{3}{5}$, donc $E(X)^2 = \frac{9}{25}$. Alors d'après la formule de König-Huygens,
   $$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \frac{13}{5} - \frac{9}{25} = \frac{65}{25} - \frac{9}{25} = \frac{56}{25}.$$

2. **Somme de deux dés**

   J'ai déjà calculé $E\left(X^2\right)$ dans la partie précédente et trouvé que $E\left(X^2\right) = \frac{329}{6}$. Par ailleurs $E(X) = 7$, donc $E(X)^2 = 49$. Alors d'après la formule de König-Huygens,
   $$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \frac{329}{6} - 49 = \frac{329}{6} - \frac{294}{6} = \frac{35}{6}.$$

Proposition 3.3 Soit X une variable aléatoire finie et soient a et b deux réels. Alors
$$V(aX+b) = a^2 V(X).$$
En particulier
$$V(X+b) = V(X).$$

*Remarque : Contrairement à l'espérance, la variance **N'est PAS** linéaire.*

Exemple 3.10 On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu. Soit $Y = 2X+3$.
Calculer la variance de la variable aléatoire X puis celle de Y.

Il s'agit d'une loi uniforme sur l'intervalle $[\![1,6]\!]$. J'ai déjà calculé l'espérance et trouvé que $E(X) = \frac{7}{2}$. En appliquant le théorème de transfert, je trouve
$$E\left(X^2\right) = \sum_{k=1}^{6} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{6} k^2 \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{91}{6}.$$
Alors d'après la formule de König-Huygens,
$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182}{12} - \frac{147}{12} = \frac{35}{12}.$$
Enfin d'après la Proposition 3.3,
$$V(Y) = V(2X+3) = 2^2 V(X) = 4 \times \frac{35}{12} = \frac{35}{3}.$$

3.3 Lois usuelles

3.3.1 Loi uniforme

Définition 3.7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur $[\![1,n]\!]$ lorsque son support est $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et que chaque valeur a la même probabilité d'arriver :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad P(X=k) = \frac{1}{n}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![1,n]\!]\big)$.

Exemple 3.11 Deux exemples classiques :

1. On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu.

   Alors X suit une loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$, i.e. $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![1,6]\!]\big)$, car $X(\Omega) = [\![1,6]\!]$ et pour tout $k \in [\![1,6]\!]$, $P(X=k) = \frac{1}{6}$.
2. On tire au hasard une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et on note X le numéro obtenu.

   Alors X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, i.e. $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![1,n]\!]\big)$, car $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $P(X=k) = \frac{1}{n}$.

Proposition 3.4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[\![1,n]\!]$.
Alors l'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Méthode 3.3 (Modélisation et rédaction pour utiliser la loi uniforme)

Modélisation Soit une expériences aléatoire comportant n issues équiprobables numérotées de 1 à n. Alors la variable aléatoire finie égale au numéro de l'issue se réalisant suit une loi $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$.

Rédaction on écrira « comme les valeurs de X sont les entiers entre 1 et n, et que toutes ces valeurs sont équiprobables, alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$ ».

Exercice 3.2 Une entreprise possède dix chaînes de fabrication : $C_1, C_2, \ldots, C_{10}$. Chaque matin une chaîne est choisie au hasard pour étudier son bon fonctionnement, soit X la variable aléatoire égale au numéro de la chaîne tirée au sort. Déterminer la loi de X.

La variable aléatoire X prend ses valeurs dans l'intervalle $[\![1,10]\!]$ et chaque valeur est équiprobable, ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;10]\!])$.

3.3.2 Loi de Bernoulli

Définition 3.8 Une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in]0,1[$ lorsqu'il n'y a que deux issues possibles $X(\Omega) = \left\{0,1\right\}$ et que

$$P(X=1) = p \quad \text{et} \quad P(X=0) = 1-p.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Une **épreuve** de Bernoulli est une épreuve aléatoire qui comporte exactement deux issues: une que l'on qualifie de "succès", de probabilité p, et l'autre que l'on qualifie d'"échec", de probabilité $1-p$.
On réalise une fois cette épreuve de Bernoulli et si l'issue est un "succès", la variable aléatoire prend la valeur $X=1$, sinon elle prend la valeur $X=0$.

Exemple 3.12 On lance une pièce équilibrée et on note X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat est pile et 0 sinon.

Alors X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$, i.e. $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Proposition 3.5 Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
Alors l'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1-p).$$

Méthode 3.4 (Modélisation et rédaction pour utiliser la loi de Bernoulli)

Modélisation On utilise la loi de Bernoulli dès qu'on considère une épreuve ayant 2 issues possibles : succès avec probabilité p et échec avec probabilité $1-p$. En effet, dans ce cas, la variable aléatoire valant 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

Rédaction on écrira « on appelle succès l'événement ...de probabilité p. Alors X, la variable aléatoire qui vaut 1 en cas de succès, 0 en cas d'échec, suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \dots$

Exercice 3.3 Une entreprise possède dix chaînes de fabrication : $C_1, C_2, \dots, C_{10}$. Elle sait qu'une chaîne possède un problème mais elle ignore laquelle, elle choisit alors une chaîne au hasard. On considère alors X la variable aléatoire prenant la valeur 1 si la chaîne testée est défaillante et 0 sinon. Déterminer la loi de X.

Notons succès l'événement : « la chaîne testée est défaillante » de probabilité $\frac{1}{10}$. La variable aléatoire X prend alors la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec. X suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{10}$.

3.3.3 Loi binomiale

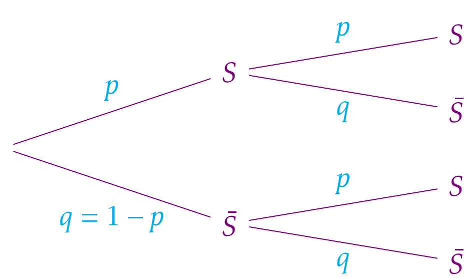
Définition 3.9 L'expérience aléatoire qui consiste à **répéter** n fois une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p **de manière indépendante** est appelée un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p.
La variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenus au cours des n épreuves de ce schéma de Bernoulli suit une **loi binomiale** de paramètres n et p.
On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Exemple 3.13 On lance 10 fois de suite une pièce équilibrée et on note X le nombre de pile obtenus.

Alors X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$, i.e. $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

Dans les cas où $n = 2$ ou $n = 3$, on peut modéliser la situation à l'aide d'un arbre.

1. *Cas* $n = 2$
   On répète deux épreuves de Bernoulli de paramètre p, successivement et de manière indépendante.



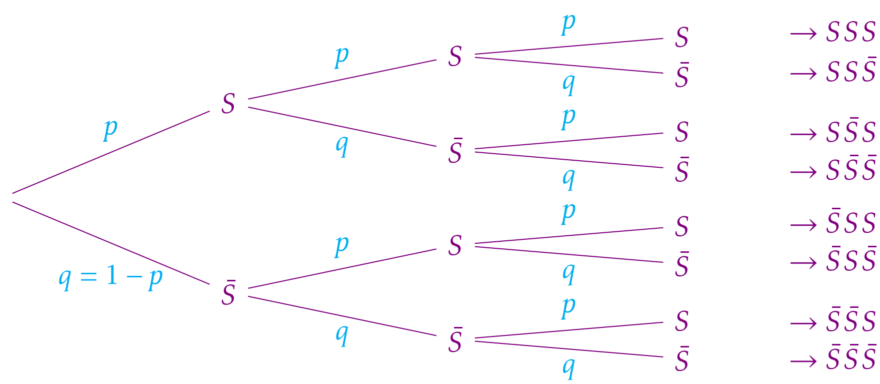
   La variable aléatoire X, égale au nombre de succès, suit une loi binomiale de paramètres $n = 2$ et p.

Nombre de succès k	0	1	2
$P(X = k)$	q^2	$2 \times p \times q$	p^2

2. *Cas* $n = 3$
   On répète trois épreuves de Bernoulli de paramètre p, successivement et de façon indépendante.
   L'expérience comporte $2^3 = 8$ issues, chacune de ces issues pouvant être schématisée à l'aide d'un mot de trois lettres :

$$\left\{SSS, SS\bar{S}, S\bar{S}S, \bar{S}SS, S\bar{S}\bar{S}, \bar{S}S\bar{S}, \bar{S}\bar{S}S, \bar{S}\bar{S}\bar{S}\right\}.$$

   Pour obtenir la loi de probabilité de la variable aléatoire X, égale au nombre de succès, on dresse un arbre et on compte le nombre d'issues contenant k succès.



La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et p.

Nombre de succès k	0	1	2	3
$P(X = k)$	q^3	$3 \times p \times q^2$	$3 \times p^2 \times q$	p^3

Définition 3.10 Soit n un entier naturel non nul et k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
Si on représente par un arbre une série de n épreuves de Bernoulli, le coefficient binomial, noté $\binom{n}{k}$, est le nombre de chemins réalisant k succès parmi n épreuves répétées.

<u>*Remarque*</u> *:*

- *Un seul chemin permet d'obtenir 0 succès ou n succès consécutifs, donc* $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
- *Il y a n chemins différents qui permettent d'obtenir un seul succès. Ainsi* $\binom{n}{1} = n$.
- *Le nombre entier $\binom{n}{k}$ peut se calculer à la main en utilisant l'expression suivante :*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{avec} \qquad n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n.$$

Vous utiliserez la calculatrice pour calculer ce genre de termes.

Proposition 3.6 Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres n et p. Alors $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès est donnée par

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}.$$

Proposition 3.7 Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.
Alors l'espérance et la variance de X sont données par

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p).$$

Méthode 3.5 (Modélisation et rédaction pour utiliser la loi binomiale)

Modélisation Soit une expériences aléatoire se déroulant en n épreuves indépendantes. Chaque épreuve a deux issues possibles : succès avec probabilité p ou échec avec probabilité $1-p$. La variable aléatoire X comptant le nombre de succès au cours de n épreuves de Bernoulli suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Rédaction on écrira « Dans une expérience à deux issues, on appelle succès l'événement ...de probabilité p. On répète n fois cette expérience de manière identique et indépendante. Alors si X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$».

Exemple 3.14 Dans une entreprise de vente par correspondance, une étude statistique a montré que 40% des clients choisissent l'option *Livraison Express*. On prélève au hasard 30 bons de commande. On considère que le nombre de bons de commande est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 30 bons. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de bons portant la mention *Livraison Express*.

1. Déterminer la loi de X en justifiant soigneusement.

   X compte le nombre de réalisations de l'événement succès "le bon de commande comprend la mention *Livraison Express*" de probabilité 0.4 lors de la répétition de 30 expériences identiques et indépendantes. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0.4$.

2. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat.

   Puisque X suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0.4$, alors

   $$E(X) = n \times p = 30 \times 0.4 = 12.$$

   Cela signifie que sur un grand nombre de prélèvements de 30 bons se trouvent en moyenne 12 bons de commande avec la mention *Livraison Express*.

3.3.4 Loi géométrique

Définition 3.11 Une variable aléatoire X suit une **loi géométrique de paramètre** $p \in]0;1[$ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

On note : $\quad X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Exemple 3.15 On lance indéfiniment un dé non truqué. On note X le rang du lancer qui donne le nombre 1 pour la première fois.
Alors, X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.

Remarque : Cet exemple est typique de la loi géométrique dont le modèle est le suivant :

- ★ *On réalise une succession d'épreuves indépendantes de Bernoulli de même paramètre p.*
- ★ *On note X le rang de l'épreuve qui a amené le premier succès. X est considéré comme « le temps d'attente du premier succès ».*

Proposition 3.8 Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$. Alors X admet une espérance et une variance et on a :

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Méthode 3.6 (Modélisation et rédaction pour utiliser la loi géométrique)

Modélisation On considère une expérience consistant en une suite infinie d'épreuves mutuellement indépendantes, chaque épreuve ayant deux issues possibles : succès avec probabilité p et échec avec probabilité $1-p$.
La variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès suit la loi géométrique de paramètre p.

Rédaction On écrira « On appelle succès l'événement ...de probabilité p. Alors la variable aléatoire X qui compte le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès (ou égale au rang du premier succès) en répétant de manière identique et indépendante l'expérience de Bernoulli associée suit la loi géométrique de paramètre p. »

Exercice 3.4 On effectue une succession de tirages avec remise d'une boule dans une urne contenant 7 boules noires et 3 boules rouges et on note Y le rang de la première boule rouge. Reconnaître la loi de Y puis déterminer l'espérance et la variance de Y.

On appelle succès le fait d'obtenir une boule rouge. On a donc une probabilité $p = \frac{3}{10}$ d'avoir un succès. On répète indéfiniment nos tirages de manière identique et indépendante jusqu'à avoir un succès. La variable aléatoire Y est égale au rang du premier succès, ainsi la variable aléatoire Y suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{3}{10}$. On a alors :

$$E(Y) = \frac{10}{3} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-\frac{3}{10}}{\frac{3^2}{10^2}} = \frac{7}{10} \times \frac{10^2}{3^2} = \frac{70}{9}.$$

3.3.5 Loi de Poisson

Définition 3.12 Soit λ un réel strictement positif. Une variable aléatoire X suit une **loi de Poisson de paramètre** λ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

On note : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

<u>Remarque</u> : La loi de Poisson est parfois appelée ***loi des événements rares****. Elle sert par exemple à modéliser :*

- ⋆ *le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique dans un intervalle de temps donné*
- ⋆ *le nombre de véhicules franchissant un poste de péage dans un intervalle de temps donné*
- ⋆ *le nombre de clients se présentant dans un magasin dans un intervalle de temps donné*
- ⋆ *le nombre de fautes de frappe dans les pages d'un cours de maths etc*

Proposition 3.9 Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Alors X admet une espérance et une variance et on a :

$$E(X) = \lambda \qquad \text{et} \qquad V(X) = \lambda.$$

Exercice 3.5 Dans une entreprise on admet que le nombre de pièces défectueuses produites par minute est une variable aléatoire X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(3)$.
Déterminer la probabilité de l'événement A : « le nombre de pièces défectueuses produites en une minute est supérieur à 3 ».

Par définition, $P(A) = P(X > 3)$ donc :

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(X \leqslant 4) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) - P(X=4) \\ &= 1 - \frac{3^0}{0!}\mathrm{e}^{-3} - \frac{3^1}{1!}\mathrm{e}^{-3} - \frac{3^2}{2!}\mathrm{e}^{-3} - \frac{3^3}{3!}\mathrm{e}^{-3} - \frac{3^4}{4!}\mathrm{e}^{-3} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-3}(1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6} + \frac{81}{24}) \\ &\simeq 0,1848 \end{aligned}$$

La probabilité que le nombre de pièces défectueuses produites en une minute soit supérieur à 3 est d'environ de 0,1848.

3.3.6 Tableau récapitulatif des lois discrètes usuelles

Loi	Valeurs prises	Probabilités	Espérance	Variance
Uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$	$[\![1;n]\!]$	$P(X=k) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$	$\{0;1\}$	$P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$	p	$p(1-p)$
Binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$	$[\![0;n]\!]$	$P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Géométrique : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$	λ	λ