2. Probabilités élémentaires

2.1 Motivation, un exemple concret

La société Rohm et Hass, filiale de Morton International, Philadelphie, Pennsylvanie

Rohm et Hass est le leader mondial de la production de matériaux particuliers, dont des matériaux électroniques, des polymères pour peintures, et des articles de soins. Les produits de la société permettent de créer des biens de consommation leaders sur des marchés tels que les médicaments, les aliments, les fournitures de bureau, les équipements de communication et les produits ménagers, La société emploie plus de 17000 salariés et ses ventes annuelles s'élèvent à 8 milliards de dollars. Un réseau de plus de 100 sites de fabrication, de recherche technique et de service clients permettent aux produits et services Rohm et Hass d'être présents dans 27 pays dans le monde.

Dans le domaine des produits chimiques, la société offre une variété de produits conçus pour satisfaire les demandes uniques de ses clients. Pour un client particulier, la société a produit un catalyseur onéreux utilisé dans le processus de production chimique de ce client. Le contrat exigeait que le client teste chaque livraison après réception et détermine si le catalyseur répondait à ses besoins.

Les livraisons qui ne passaient pas le test du client étaient renvoyées. Au cours du temps, l'expérience a montré que le client acceptait 60% des livraisons et en renvoyait 40%. Ni le client ni la société n'étaient satisfaits de cette qualité de service.

La société a étudié la possibilité de dupliquer le test client avant la livraison. Cependant, le coût élevé de l'équipement de test nécessaire a rendu cette alternative irréalisable. Les chimistes de la société qui travaillaient sur ce problème, ont proposé un test différent mais relativement peu coûteux pouvant être effectué avant livraison. La société pensait que le nouveau test fournirait une indication quant au fait que le catalyseur passe ou non le test plus sophistiqué effectué par le client. La question en termes de probabilité était : Quelle est la probabilité que le catalyseur passe le test du client avec succès sachant qu'il a passé le nouveau test avant livraison?

Un échantillon de catalyseurs fut produit et soumis au nouveau test de la société. Seuls les catalyseurs qui passaient avec succès le nouveau test étaient envoyés au client. L'analyse probabiliste des données a indiqué que si le catalyseur passait avec succès le nouveau test avant livraison, il y avait une probabilité égale à 0,909 qu'il passe le test du client. En d'autres termes, si le catalyseur passait avec succès le nouveau test avant livraison, il n'y avait qu'une probabilité de 0,091 qu'il soit rejeté lors du test du client et qu'il soit renvoyé. L'analyse probabiliste démontrait le bien-fondé de la mise en œuvre de ce test avant livraison. Ce nouveau test a immédiatement amélioré la relation client et réduit substantiellement les coûts de transport et de manutention des livraisons renvoyées.

La probabilité qu'une livraison soit acceptée par le client sachant qu'elle a passé avec succès le nouveau test est appelée une probabilité conditionnelle. Dans ce chapitre, vous apprendrez à calculer des probabilités conditionnelles et d'autres probabilités utiles dans la prise de décision.

Les décisions commerciales sont souvent prises en se basant sur l'analyse d'éléments incertains, comme par exemple :

- Quelles sont les chances que les ventes baissent si on augmente le prix?
- Quelle est la probabilité qu'une nouvelle méthode d'assemblage augmente la productivité?
- Quelle est la probabilité que le projet soit fini à temps?
- Quelles sont les chances qu'un nouvel investissement soit rentable?

La **probabilité** est une mesure numérique de la vraisemblance de l'occurrence d'un événement. Ainsi, les probabilités peuvent être utilisées pour mesurer le degré d'incertitude associé aux quatre événements cités ci-dessus.

2.2 Le cadre probabiliste

Définition 2.1 Une **expérience aléatoire** est une expérience dont l'**issue** (le résultat) ne peut pas être prévue. La répétition d'une telle expérience ne donne *a priori* pas le même résultat.

Exemple 2.1

1. Jeter un dé à 6 faces et noter le résultat.
2. Lancer une pièce de monnaie et noter le résultat.
3. Lancer une copie du haut d'un escalier à 21 marches et obtenir la note de la copie.

Définition 2.2 L'**univers** est l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire. Il est souvent noté Ω. Une **issue** est un élément $\omega \in \Omega$.

Exemple 2.2

1. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = [\![1, 6]\!]$,
2. $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$,

3. $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots, 18, 19, 20\} = [\![0, 20]\!]$.

Définition 2.3 Un **événement** est un ensemble de résultats possibles d'une expérience aléatoire. Dans le cas où l'univers Ω est fini, on peut associer de manière unique un événement A à une partie (un sous-ensemble) de Ω, que l'on note également A,

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ réalise } A\}.$$

Autrement dit, si $\omega \in \Omega$ est une issue possible de l'expérience, alors ω réalise A si et seulement si $\omega \in A$.

Exemple 2.3 En reprenant les expériences précédentes,

1. « obtenir un numéro impair » : la partie associée est $A = \{1, 3, 5\}$.
2. « obtenir face » : la partie associée est $A = \{\text{face}\}$.
3. « avoir la moyenne » : la partie associée est $A = \{10, 11, \dots, 19, 20\} = [\![10, 20]\!]$.

On effectue une expérience aléatoire. On note Ω l'univers. On considère A et B deux événements liés à l'expérience aléatoire.

Définition 2.4 Un événement est dit

- **élémentaire** lorsque la partie associée est réduite à un élément (on parle de singleton),
- **certain** s'il est toujours réalisé (c'est alors l'univers Ω),
- **impossible** s'il n'est jamais réalisé (c'est alors l'ensemble vide $\emptyset$).

Exemple 2.4 En reprenant les expériences précédentes,

1. Un événement élémentaire est « obtenir 5 », associé au singleton $\{5\}$.
2. Un événement certain est « obtenir pile ou face », associé à la partie Ω.
3. Un événement impossible est « avoir une note négative », associé à la partie $\emptyset$.

Définition 2.5 Soit $\omega \in \Omega$. On dit que ω réalise **l'événement contraire** de A si et seulement si ω ne réalise pas A. On note $\overline{A}$ l'événement contraire de A. La partie $\overline{A}$ associée est la partie constituée de tous les éléments de Ω qui ne sont pas dans A, i.e. $\overline{A} = \Omega \setminus A$. On l'appelle le **complémentaire** de A.

Exemple 2.5 En reprenant les expériences précédentes,

1. Soit A l'événement « obtenir un nombre pair ». La partie associée est $A = \{2, 4, 6\}$.
   L'événement contraire est $\overline{A}$: « obtenir un nombre impair », la partie associée est $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$.
2. Soit A l'évènement « obtenir face ». La partie associée est $A = \{\text{face}\}$.
   L'événement contraire est $\overline{A}$: « obtenir pile », la partie associée est $\overline{A} = \{\text{pile}\}$.
3. Soit A l'évènement « avoir une note supérieure où égale à 12 ». La partie associée est $A = [\![12, 20]\!]$.
   L'événement contraire est $\overline{A}$: « avoir une note inférieure ou égale à 11 », la partie associée est $\overline{A} = [\![0, 11]\!]$.

Définition 2.6 On dit que l'événement A **implique** l'événement B si la réalisation de l'événement A implique celle de l'événement B. En terme ensembliste, cela signifie que

$$A \text{ implique } B \iff A \subset B.$$

Exemple 2.6 On considère l'expérience aléatoire suivante : on lance un dé à 6 faces deux fois de suite. Soit A l'événement « faire un 6 au premier lancer » et B l'évènement « faire au moins un 6 ». Les parties associées sont

$$A = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\} \quad \text{et}$$

$$B = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6)\}.$$

Je constate bien que l'événement A implique l'événement B, puisque faire un 6 au premier lancer implique de faire au moins un 6, et aussi que $A \subset B$.

Définition 2.7 On dit que l'événement A **ou** B est réalisé si et seulement si au moins l'un des deux événements A ou B est réalisé. La partie associée est la réunion $A \cup B$.

Exemple 2.7 On reprend l'expérience précédente. Soit A l'événement « faire un 3 au premier lancer » et B l'événement « faire un 5 au deuxième lancer ». Les parties associées sont

$$A = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\} \quad \text{et} \quad B = \{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5)\}.$$

L'événement A **ou** B est « faire un 3 au premier lancer ou un 5 au deuxième » et la partie associée est

$$A \cup B = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(1,5),(2,5),(4,5),(5,5),(6,5)\}.$$

Définition 2.8 On dit que l'événement A **et** B est réalisé si et seulement si les deux événements A et B sont réalisés. La partie associée est l'intersection $A \cap B$.

Exemple 2.8 On reprend l'expérience précédente.
L'événement A **et** B est « faire un 3 au premier lancer et un 5 au deuxième » et la partie associée est

$$A \cap B = \{(3,5)\}.$$

Définition 2.9 On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** si l'événement A **et** B est impossible.
Autrement dit, les événements A et B sont incompatibles si et seulement si les parties A et B associées vérifient $A \cap B = \emptyset$.

Exemple 2.9 On reprend l'expérience précédente. Soit A l'événement « faire un 3 au premier lancer » et C l'événement « faire un 5 au premier lancer ». A et C sont-ils incompatibles ?

Je vérifie facilement que les deux parties A et C associées vérifient $A \cap C = \emptyset$. Les événements A et C sont donc incompatibles.

Proposition 2.1 (Lois de Morgan) Soient A et B deux événements. Le passage au complémentaire transforme les intersections en réunions et inversement :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Exemple 2.10 On reprend l'expérience précédente.
L'événement contraire de A **ou** B est « ne faire ni un 3 au premier lancer, ni un 5 au deuxième ».
Il correspond bien à l'événement $\overline{A}$ et $\overline{B}$ i.e. $\overline{A} \cap \overline{B}$.
L'événement contraire de A **et** B est « ne pas faire un 3 au premier lancer et un 5 au deuxième ».
Il correspond bien à l'événement $\overline{A}$ ou $\overline{B}$ i.e. $\overline{A} \cup \overline{B}$.

On récapitule toutes ces notions dans le tableau suivant.

Terminologie probabiliste	**Terminologie ensembliste**	**Notation**
événement certain	ensemble dans sa totalité	Ω
événement impossible	ensemble vide	$\emptyset$
événement élémentaire	singleton	$\{\omega\}$
événement A	ensemble A	$A \subset \Omega$
événement contraire de A	complémentaire de A	$\overline{A} = \Omega \setminus A$
A ou B	A union B	$A \cup B$
A et B	A inter B	$A \cap B$
A et B incompatibles	A et B disjoints	$A \cap B = \emptyset$
ω réalise A	ω appartient à A	$\omega \in A$

2.3 Probabilités

Dans toute la suite, Ω désigne un ensemble fini et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.

Définition 2.10 On appelle **probabilité** sur Ω (ou loi de probabilité) toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant

$$P(\Omega) = 1 \quad \text{et} \quad \text{pour tous événements incompatibles } A \text{ et } B, \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A)$ s'appelle la **probabilité de l'événement** A.

Attention ! Une probabilité est par définition à valeurs dans $[0,1]$.
Ainsi, pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a

$$\boxed{0 \leqslant P(A) \leqslant 1.}$$

On vérifie donc ***SYSTÉMATIQUEMENT*** que le résultat d'un calcul de probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.

Exemple 2.11 Soit $\Omega = [\![1,6]\!]$. On définit P sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par :

$$\forall k \in \Omega, \quad P(\{k\}) = \frac{1}{6}.$$

L'application P ainsi définie est bien une probabilité. Elle modélise la situation classique d'un dé équilibré.

2.3.1 Propriétés de base

Proposition 2.2 Soient A et B deux événements. Alors pour toute probabilité P,

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$,
- $P(\emptyset) = 0$,
- si $A \subset B$, alors $\quad P(A) \leqslant P(B)$.
- $P(A) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$

Proposition 2.3 (Formule de Poincaré) Soient A et B deux événements. Dans le cas où les événements ne sont pas incompatibles, la probabilité de l'union est donnée par

$$P\Big(A \cup B\Big) = P\Big(A\Big) + P\Big(B\Big) - P\Big(A \cap B\Big).$$

2.3.2 Probabilités élémentaires

Théorème 2.1 Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement. Si $A = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, alors on a

$$P(A) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \ldots + P(\{\omega_n\}) = \sum_{i=1}^{n} P\Big(\{\omega_i\}\Big).$$

Exemple 2.12 Un dé est truqué pour que le 6 apparaisse deux fois plus souvent que les autres faces qui, elles, ont toutes la même probabilité de tomber. Calculer $P\Big(\{4, 5, 6\}\Big)$.

Les nombres 1, 2, 3, 4 et 5 ayant la même probabilité de tomber, il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que

$$\forall k \in [\![1, 5]\!], \quad P(\{k\}) = \lambda.$$

De plus, le 6 apparaît deux fois plus souvent que les autres faces donc $P(\{6\}) = 2\lambda$. Par ailleurs

$$\sum_{k=1}^{6} P(\{k\}) = P(\Omega) = 1$$

et

$$\sum_{k=1}^{6} P(\{k\}) = 5 \times \lambda + 2\lambda = 7\lambda.$$

D'où $\lambda = \dfrac{1}{7}$, et je peux déduire que

$$P\Big(\{4, 5, 6\}\Big) = P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = \lambda + \lambda + 2\lambda = 4\lambda = \frac{4}{7}.$$

2.3.3 Le cas de l'équiprobabilité

Définition 2.11 Deux événements A et B sont dits **équiprobables** si ils ont la même probabilité, c'est-à-dire si $P(A) = P(B)$. On dit qu'il y a **équiprobabilité** lorsque tous les événements élémentaires sont équiprobables.

Remarque : Les situations d'équiprobabilité sont très nombreuses. Par exemple le lancer d'une pièce ou d'un dé équilibré, le tirage au hasard d'une boule dans une urne (on dit souvent "indiscernables au toucher" pour supposer l'équiprobabilité), d'une carte dans un jeu, d'une personne dans un échantillon, etc. Il faut cependant bien faire attention à ne pas voir de l'équiprobabilité dans toutes les situations !

*Remarque : **Loto et équiprobabilité** Le tirage du Loto est un exemple classique d'équiprobabilité : tous les nombres ont absolument la même chance d'être tirés. Par exemple, le tirage $\{1,2,3,4,5,6\}$ a la même probabilité de sortir que les autres, alors que peu de gens auraient l'idée de jouer ces 6 numéros.*

Théorème 2.2 On suppose que l'on est en situation d'équiprobabilité.

- Pour tout $\omega \in \Omega$, $P\big(\{\omega\}\big) = \frac{1}{n}$ où $n = card(\Omega)$.
- Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}.$$

*Remarque : On appelle **cardinal** d'un ensemble fini E son nombre d'éléments et on le note $card(E)$.*

Exemple 2.13
- $card(\{0,3,7\})$ $= 3$
- $card(\emptyset)$ $= 0$
- $card(\llbracket 1,n \rrbracket)$ $= n$
- $card(\llbracket 0,n \rrbracket)$ $= n+1$

Exercice 2.1 On dispose d'une urne contenant 15 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 15. On pioche une boule dans l'urne. Quelle est la probabilité :

1. que ce soit la boule numéro 13 ?

   Il y a une seule boule avec le numéro 13, la probabilité est donc de $\frac{1}{15}$.
2. qu'elle ait un numéro pair ?

   Il y a 7 boules qui ont un numéro pair, la probabilité est donc de $\frac{7}{15}$.
3. que son numéro soit un multiple de 5?

   Les boules $5,10,15$ ont un numéro qui est un multiple de 5, on a donc une probabilité de $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ de tirer une boule avec un numéro qui est un multiple de 5.
4. que son numéro soit supérieur ou égal à 17?

   Les boules sont numérotées de 1 à 15, on ne peut donc tirer une boule avec un numéro supérieur ou égal à 17, la probabilité vaut donc 0.

2.4 Probabilités conditionnelles

2.4.1 Définitions et propriétés

Définition 2.12 Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement tel que $P(A) \neq 0$. On appelle **probabilité conditionnelle de** B **sachant** A le nombre, noté $P_A(B)$, défini par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Exemple 2.14 On lance un dé cubique équilibré et on considère les événements suivants:

- A : « obtenir un nombre inférieur à 3 »,
- B : « obtenir un 5 »,
- C : « obtenir un 2 ».

Calculer $P_A(B)$ et $P_A(C)$ de deux façons différentes.

Première méthode *:* $P_A(B)$ correspond à la probabilité d'obtenir un 5 **sachant** que l'on a obtenu un nombre inférieur à 3, ce qui est évidemment impossible. D'où

$$P_A(B) = 0.$$

Aussi, $P_A(C)$ correspond à la probabilité d'obtenir un 2 sachant que l'on a obtenu un nombre inférieur à 3. Puisqu'il y a 3 valeurs inférieures ou égales à 3, cela fait une chance sur 3 d'obtenir un 2. Donc

$$P_A(C) = \frac{1}{3}.$$

Deuxième méthode *:* Comme $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{5\}$ et $C = \{2\}$, alors $A \cap B = \emptyset$ et $A \cap C = \{2\}$. Donc

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0 \quad \text{et} \quad P_A(C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{3}.$$

Proposition 2.4 Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement tel que $P(A) \neq 0$. L'application

$$\begin{array}{rccc} P_A & : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & & B & \mapsto & P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{array}$$

est une probabilité sur Ω.

Remarque : En particulier, toutes les propriétés vues dans la section 2.3 s'appliquent à $P_A : B \mapsto P_A(B)$.

2.4.2 Formule des probabilités composées

Si A et B sont deux événements de probabilité non nulle, alors par définition de $P_A(B)$ et de $P_B(A)$, on a

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A).$$

On peut généraliser la formule précédente au cas de trois événements :

Proposition 2.5 (Formule des probabilités composées) Soient A_1, A_2, et $A_3 \in \mathcal{P}(\Omega)$ des événements tels que $P\Big(A_1 \cap A_2\Big) \neq 0$. Alors

$$P\Big(A_1 \cap A_2 \cap A_3\Big) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3).$$

Exemple 2.15 Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules rouges, indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise 3 boules dans cette urne. Calculer la probabilité d'obtenir trois boules blanches.

Je note A_i l'événement « la i-ème boule tirée est blanche ». Clairement

$$P(A_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

$P(A_2)$ est moins évident car je ne connais pas la composition précise de l'urne lors du deuxième tirage. Cependant le calcul de $P_{A_1}(A_2)$ est facile :

$$P_{A_1}(A_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

De même,

$$P_{A_1 \cap A_2}(A_3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Par la formule des probabilités composées, j'obtiens ainsi

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{30}.$$

2.4.3 Formule des probabilités totales

Définition 2.13 Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ des événements. On dit que $\{A, B\}$ est un **système complet d'événements** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\Omega = A \cup B \quad \text{et} \quad A \cap B = \emptyset.$$

Soient $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{P}(\Omega)$ des événements. On dit que $\{A_1, A_2, A_3\}$ est un **système complet d'événements** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \quad \text{et} \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset, A_1 \cap A_3 = \emptyset, A_2 \cap A_3 = \emptyset.$$

Exemple 2.16

- Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors $\{A, \overline{A}\}$ est un système complet d'événements.

  On lance un dé à 6 faces. On note A l'événement « obtenir un nombre pair » et B l'événement « obtenir un nombre impair ». Les ensembles associés sont $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{1, 3, 5\}$.
  Ainsi $\{A, B\}$ forme bien un système complet d'événements.

- Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, alors $\Big\{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}\Big\}$ est un système complet d'événements.

Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. Les événements A_1 : « obtenir un 1 », A_2 : « obtenir un 2 » et A_3 : « obtenir un 3 » forment un système complet d'événements.

Théorème 2.3 (Formule des probabilités totales)

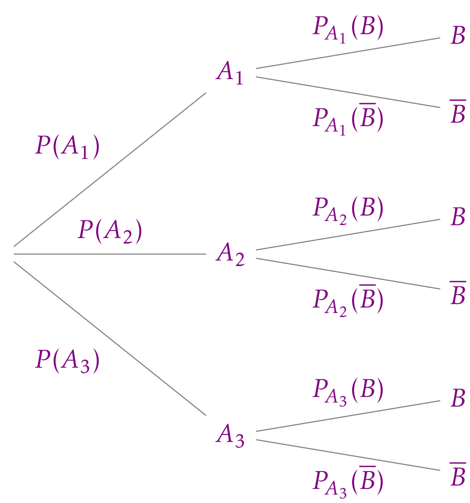
- Soit $\{A, \overline{A}\}$ un système complet d'événements. Alors, pour tout événement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a
$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}).$$
Si de plus, $P(A) \neq 0$ alors $\quad P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$.
- Soit $\{A_1, A_2, A_3\}$ un système complet d'événements. Alors, pour tout événement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a
$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3).$$
Si de plus, $P(A_1) \neq 0$, $P(A_2) \neq 0$ et $P(A_3) \neq 0$, alors
$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + P(A_3)P_{A_3}(B).$$

2.4.4 Lien avec les arbres pondérés

Il est relativement commode de représenter une expérience aléatoire par un arbre pondéré et surtout de savoir utiliser cet arbre pour faire des calculs de probabilités.
On considère l'exemple ci-contre dont l'univers associé comporte six issues. L'ensemble

$$\{A_1 \cap B, A_1 \cap \overline{B}, A_2 \cap B, A_2 \cap \overline{B}, A_3 \cap B, A_3 \cap \overline{B}\}$$

forme un *système complet d'événements*.
Le but de ce paragraphe est d'illustrer les propriétés vues précédemment via un certain nombre de "règles" de calcul sur les arbres pondérés.



Règle 1 : La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est égale à 1.
Cette règle illustre notamment le fait que la probabilité conditionnelle est bien une probabilité. Dans l'exemple ci-dessus, on a par exemple

$$\begin{aligned} P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) &= 1, \\ P_{A_1}(B) + P_{A_1}(\overline{B}) &= 1, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Règle 2 : La probabilité de l'événement représenté par un chemin est égal au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.
Cette règle illustre la formule des probabilités composées. Dans l'exemple ci-dessus, on a par exemple

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap B) &= P(A_1) \times P_{A_1}(B), \\ P(A_2 \cap \overline{B}) &= P(A_2) \times P_{A_2}(\overline{B}), \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Règle 3 : La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des chemins qui mènent à cet événement.
Cette règle illustre la formule des probabilités totales. Dans l'exemple ci-dessus, on a par exemple

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + P(A_3) \times P_{A_3}(B).$$

Exercice type 2.1 Un étudiant a beaucoup de mal à se réveiller le matin. Aussi, pour parer à toute éventualité, il programme son réveil à trois horaires h_1, h_2 et h_3. Il se réveille à l'horaire h_1 avec probabilité $\frac{1}{3}$ et à l'horaire h_2 avec probabilité $\frac{1}{4}$. Lorsqu'il se réveille à l'horaire h_1, la probabilité qu'il arrive à l'heure en classe est de 95%. Lorsqu'il se réveille à l'horaire h_2, la probabilité qu'il arrive en retard en classe est de 10%. Enfin, lorsqu'il se réveille à l'horaire h_3, la probabilité qu'il arrive en retard en classe est de 30%. Quelle est la probabilité que l'étudiant soit en retard ?

Je représente l'expérience par un arbre pondéré. Je note

- R l'événement « l'étudiant est en retard en classe »
- H_i les événements « l'élève se réveille à l'horaire h_i » pour $i \in \{1,2,3\}$.

Je dessine donc un arbre pondéré pour illustrer la situation et je complète avec les valeurs numériques fournies par l'énoncé. En effet, de l'énoncé, je peux extraire les valeurs suivantes :

$$P(H_1) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(H_2) = \frac{1}{4}.$$

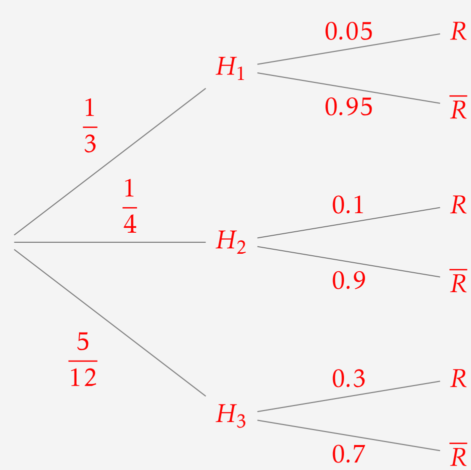
Comme d'après la règle 1, on a : $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$, j'en déduis que

$$P(H_3) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

D'après l'énoncé, on a également les valeurs suivantes :

$$P_{H_1}(\overline{R}) = 0.95, \quad P_{H_2}(R) = 0.1 \quad \text{et} \quad P_{H_3}(R) = 0.3.$$

On complète les trois branches restantes en utilisant de nouveau la règle 1.



Comme $\{H_1, H_2, H_3\}$ forme un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales (correspondant à la règle 3):

$$\begin{aligned} P(R) &= P(H_1)P_{H_1}(R) + P(H_2)P_{H_2}(R) + P(H_3)P_{H_3}(R) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{5}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{10}{100} + \frac{5}{12} \times \frac{30}{100} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

L'étudiant arrive en retard avec probabilité $\frac{1}{6}$.

Exercice 2.2 Dans une population, une personne sur 10000 souffre d'une pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99% des malades mais aussi faussement positif chez 0.1% des personnes non atteintes.
Calculer la probabilité qu'un individu obtienne un résultat positif.

Je note Ω la population, M le sous-ensemble constitué des malades et T celui constitué des individus rendant le test positif. Alors d'après l'énoncé, on a:

$$P(M) = \frac{1}{10000} = 0.0001, \qquad P_M(T) = 0.99 \quad \text{et} \quad P_{\overline{M}}(T) = \frac{0.1}{100} = 0.001.$$

Par la formule des probabilités totales, comme $\{M, \overline{M}\}$ forme un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} P(T) =& P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M}) \\ &= P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) \\ &= 0.0001 \times 0.99 + 0.9999 \times 0.001 \\ &= 0.000099 + 0.0009999 \\ &= 0.0010989, \quad i.e.\ 0.11\%. \end{aligned}$$

La probabilité pour l'individu testé d'obtenir un test positif est d'environ 0.11%.

2.4.5 Formule de Bayes

Théorème 2.4 **(Formule de Bayes)**

- Soit $\{A, \overline{A}\}$ un système complet d'événements et soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement.
  On suppose que $P(A) \neq 0$ et que $P(B) \neq 0$. Alors on a :

$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)}$$

- Soit $\{A_1, A_2, A_3\}$ un système complet d'événements et soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement.
  On suppose que $P(A_1) \neq 0$, $P(A_2) \neq 0$, $P(A_3) \neq 0$ et que $P(B) \neq 0$. Alors on a pour $i = 1$, 2 ou 3 :

$$P_B(A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + P(A_3)P_{A_3}(B)}$$

Exercice 2.3 On reprend l'exemple précédent. Un individu passe le test et obtient un résultat positif. Quelle est sa probabilité d'être malade? Qu'en conclure?

Je reprends les mêmes notations. Je cherche $P_T(M)$. Par la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} P_T(M) &= \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P(M) \times P_M(T)}{P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T)} \\ &= \frac{0.000099}{0.0010989} = \frac{10}{111} \approx 0.09, \quad i.e.\ 9\%. \end{aligned}$$

La personne n'a en réalité qu'à peine une chance sur dix d'être malade alors que le test est positif. Cela s'explique par le fait que la population de malades est extrêmement petite.

2.5 Indépendance de deux événements

Définition 2.14 Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux événements. On dit que A et B sont **indépendants** si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Remarque : Il est facile de voir que deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$ ou de manière équivalente si et seulement si $P_A(B) = P(B)$. Autrement dit, deux événements A et B sont indépendants si la donnée de l'information "B est réalisé" (resp. "A est réalisé") n'influe pas sur la réalisation de A (resp. B). On retrouve donc une notion intuitive d'indépendance.

Remarque : ***Les probabilités et les préjugés des joueurs***
À la roulette, la boule s'arrête au hasard sur un numéro rouge ou un numéro noir. Dans des ouvrages sur la roulette, on lit que la plus longue "série" (c'est-à-dire suite de résultats de même couleur) que l'on ait observée a été de 24 rouges ou de 24 noirs. Beaucoup de joueurs, s'ils observent un jour une série de 24 rouges n'hésitent pas à conclure que le noir doit forcément sortir au coup suivant "puisqu'il n'y a jamais eu de série de 25..." Mais comme l'écrivait le mathématicien Joseph Bertrand, "la roulette n'a ni conscience, ni mémoire..."
Au Loto, les numéros les moins souvent obtenus lors des tirages précédents ont-ils plus de chances de sortir au tirage suivant? Le hasard réserve bien des surprises : par exemple, le numéro 22 n'est sorti comme numéro complémentaire qu'après 344 tirages, c'est-à-dire plus de 6 ans après le premier tirage du Loto (le 19 mai 1976)...
Le "bon sens" devrait suffire à persuader les joueurs que les coups successifs de la roulette, comme les tirages successifs du Loto sont indépendants les uns des autres.

Exemple 2.17 On lance un dé cubique et on considère les évènements

- A : « le résultat obtenu est inférieur ou égal à 2 »,
- B : « le résultat obtenu est supérieur ou égal à 4 ».

Déterminer si A et B sont indépendants dans les deux cas suivants.

- **Cas 1 : dé équilibré.**

  $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ et les parties associées sont $A = \{1,2\}$ et $B = \{4,5,6\}$, donc $A \cap B = \emptyset$. Ainsi
  $$P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \quad \neq \quad 0 = P(A \cap B).$$
  Donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

- **Cas 2 : dé pipé.** On considère un dé qui permet d'obtenir 1 avec la probabilité 1.

  Puisque le dé permet d'obtenir 1 avec probabilité 1 alors la probabilité d'obtenir n'importe quel autre nombre est 0. Ainsi
  $$P(A) \times P(B) = 1 \times 0 = 0 \quad = \quad 0 = P(A \cap B).$$
  Donc les événements A et B sont indépendants.

Remarque : La notion d'indépendance dépend donc de la probabilité P étudiée.